

国际金融试验班 2022 年秋 · 时间序列

第 7 讲：自回归模型的估计

授课人：刘 岩

武汉大学经管学院金融系

2022 年 10 月 17 日

本讲内容

- ① AR(1) 过程的估计示例
- ② AR(p) 过程的估计
- ③ 回归估计的一致性

本节内容

- 1 AR(1) 过程的估计示例
- 2 AR(p) 过程的估计
- 3 回归估计的一致性

AR(1) 自回归系数的 OLS 估计

- AR(1) 过程可以使用 Yule-Walker 估计自回归系数，进而估计冲击项方差
- 而更一般的方法，是直接进行线性回归 (linear regression):

$$X_t = \beta X_{t-1} + e_t$$

回归系数 β 可以使用一般最小二乘 (ordinary least square, OLS) 进行估计

- OLS 法：最小化残差平方和

$$\min_{\beta} \sum_{t=2}^T (X_t - \beta X_{t-1})^2$$

该最小化问题的解称为 OLS 估计量，记为 $\hat{\beta}$

AR(1) 自回归系数的 OLS 估计

- OLS 估计量的直接推导：最小化问题 1-阶条件

$$\sum_{t=2}^T X_{t-1}(X_t - \beta X_{t-1}) = 0 \Rightarrow \hat{\beta}_T = \frac{\sum_{t=2}^T X_{t-1}X_t}{\sum_{t=2}^T X_{t-1}^2}$$

- 上式中分子分母同时除以 T 可得

$$\hat{\beta}_T = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T X_{t-1}X_t}{\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T X_{t-1}^2} \xrightarrow{\text{a.s.}} \frac{\sigma_X^2(1)}{\sigma_X^2(0)} = \phi$$

故 X_t 自回归方程系数的 OLS 估计值具有一致性

- 这里的 $\hat{\beta}$ 就是之前介绍的 (1-阶) 偏自相关系数

OLS 估计的矩阵形式：单一解释变量

- 单一解释变量线性回归的一般写法

$$Y_t = \beta X_t + e_t$$

其向量形式为

$$Y = X\beta + e$$

其中 $Y = [Y_1, \dots, Y_T]^T$ 为被解释变量, $X = [X_1, \dots, X_T]^T$ 解释变量,
 $e = [e_1, \dots, e_T]^T$ 残差项

- 最小化残差平方和可表示为

$$\min_{\beta} e^T e = \min_{\beta} (Y - X\beta)^T (Y - X\beta)$$

- 单一解释变量不易体现矩阵形式的优越性；多变量则不同

AR(1) 的估计：冲击项方差

- 利用大数律，可以利用样本方差 $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2$ 来估计 σ_ε^2 ；但唯一的观测值为 $\{X_t\}$ ，而非 $\{\varepsilon_t\}$
- 利用 Yule-Walker 或者 OLS 的一致估计量 $\hat{\phi}_T$ ，则大样本下

$$e_t = X_t - \hat{\phi}_T X_{t-1} \xrightarrow{\text{a.s.}} X_t - \phi X_{t-1} = \varepsilon_t$$

因此，可利用冲击项 ε_t 的样本估计值 e_t 来估计 σ_ε^2 ：

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T e_t^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T (X_t - \hat{\phi}_T X_{t-1})^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} \sigma_\varepsilon^2$$

本节内容

- 1 AR(1) 过程的估计示例
- 2 AR(p) 过程的估计
 - 矩估计
 - 线性回归的 OLS 估计
- 3 回归估计的一致性

AR(p) 自回归系数的 OLS 估计

- AR(p) 的自回归系数可以用 Yule-Walker 估计，也可用 OLS 方法进行估计
- 将 X_t 写为线性回归形式，并考虑包含常数项的一般情况

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + \cdots + \beta_p X_{t-p} + e_t$$

- 则 OLS 估计为最小化残差平方和问题的解

$$\min_{\{\beta_i\}} \sum_{t=p+1}^T (X_t - \beta_0 - \beta_1 X_{t-1} - \cdots - \beta_p X_{t-p})^2$$

- 若仍然用微积分求解极值问题的 1-阶最优条件来求解，会比较繁琐

OLS 估计的矩阵形式：多解释变量

- 多解释变量线性回归的一般写法

$$Y_t = \mathbf{X}_t^T \boldsymbol{\beta} + e_t, \quad t = 1, \dots, T$$

其中 $\mathbf{X}_t^T = [1, X_{1t}, \dots, X_{Kt}]$ 为 $K + 1$ 个回归变量

- 其矩阵形式为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}$$

其中

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_T \end{bmatrix}_{T \times 1}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{X}_T^T \end{bmatrix}_{T \times (K+1)}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_T \end{bmatrix}_{T \times 1}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix}_{(K+1) \times 1}$$

OLS 估计的矩阵形式：多解释变量

- OLS 估计量为最小化残差平方和问题的解

$$\min_{\beta} e^T e = \min_{\beta} (Y - X\beta)^T (Y - X\beta)$$

- 结论：若 $\hat{\beta}$ 满足 $X^T(Y - X\hat{\beta}) = 0$ (零向量)，则 $\hat{\beta}$ 为上述最小化问题的解；若 $X^T X$ 可逆，则 $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$
 - 只需要说明， $\forall \beta \in \mathbb{R}^{K+1}$ ，下列不等式成立即可

$$(Y - X\hat{\beta})^T (Y - X\hat{\beta}) \leq (Y - X\beta)^T (Y - X\beta)$$

- 为此，只需考虑下式的展开

$$(Y - X\beta)^T (Y - X\beta) = (Y - X\hat{\beta} + X\hat{\beta} - X\beta)^T (Y - X\hat{\beta} + X\hat{\beta} - X\beta)$$

及 $\hat{\beta}$ 所满足的性质即可

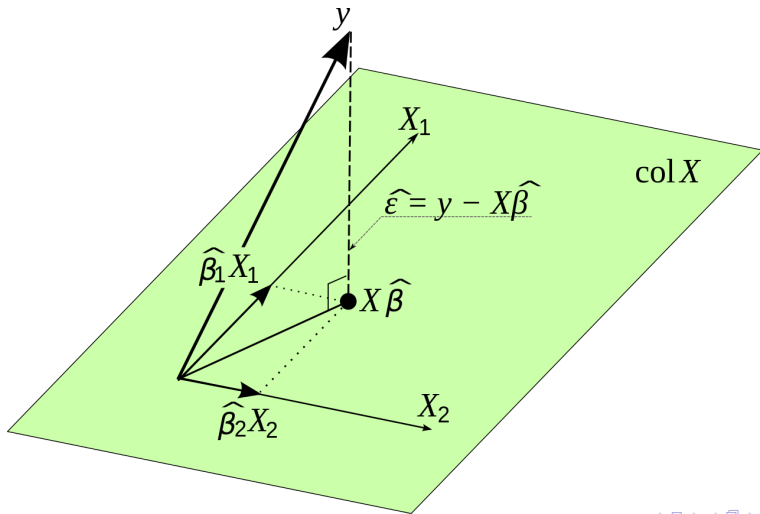
OLS 估计的矩阵形式：多解释变量

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^\top (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \\
&= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^\top (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \\
&= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^\top (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) + (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^\top (\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \\
&\quad + (\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^\top (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) + (\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^\top (\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \\
&= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^\top (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) + \underbrace{2(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^\top \mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})}_{\equiv 0} \\
&\quad + \underbrace{(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})}_{\geq 0} \\
&\geq (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^\top (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}).
\end{aligned}$$

OLS 估计的几何视角

- 将 X 看做 \mathbb{R}^T 中的 $K+1$ 个列向量, 则 $X\beta$ 为这 $K+1$ 个向量张成的子空间 \mathcal{X} 中的一个向量
- $(Y - X\beta)^\top(Y - X\beta)$ 为 Y 到 $X\beta$ 的距离
- 最小二乘估计就等价于寻找 β 使得 Y 到 \mathcal{X} 距离最短
- 这又等价于使得残差向量 $e = Y - X\beta$ 与子空间 \mathcal{X} 垂直, 即 $X^\top e = 0$
- OLS 估计可看做被解释变量对解释变量的投影 (projection)

OLS 估计的几何视角



本节内容

- 1 AR(1) 过程的估计示例
- 2 AR(p) 过程的估计
- 3 回归估计的一致性

AR(p) 自回归系数 OLS 估计的一致性

- 将含有常数项的一般 AR(p) 模型写为 OLS 回归的矩阵形式

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

其中

$$Y = \begin{bmatrix} X_{p+1} \\ \vdots \\ X_T \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & X_p & \cdots & X_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{T-1} & \cdots & X_{T-p} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{p+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_T \end{bmatrix}$$

- 注意希腊字母 epsilon ε 和 E 的花体 \mathcal{E} 的区别

AR(p) 自回归系数 OLS 估计的一致性

- 若 AR(p) 模型不包括常数项，则自回归系数的 OLS 估计为

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_T &= (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y} \\ &= \left(\frac{1}{T} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} \right)^{-1} \frac{1}{T} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y} \\ &\xrightarrow{\text{a.s.}} \begin{bmatrix} \sigma_X^2(0) & \cdots & \sigma_X^2(p-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_X^2(p-1) & \cdots & \sigma_X^2(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_X^2(1) \\ \vdots \\ \sigma_X^2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix}\end{aligned}$$

由 Yule-Walker 方程可知，该 OLS 估计满足一致性

- 一致性的关键： $\mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-i}] = 0, \forall i \geq 1$

线性回归 OLS 估计的一致性：一般情形

- 估计量 $\hat{\beta}_T$ 统计推断的基础是一致性： $\hat{\beta}_T \xrightarrow{\text{a.s.}} \beta_0$
- 假设模型系数真实值为 $\beta = \beta_0$ ，则 β 的 OLS 估计可以写为

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}_T &= (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y} \\
 &= (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top (\mathbf{X} \beta_0 + \varepsilon) \\
 &= \beta_0 + (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \varepsilon \\
 &= \beta_0 + \left(\frac{1}{T} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} \right)^{-1} \frac{1}{T} \mathbf{X}^\top \varepsilon \\
 &= \beta_0 + \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{X}_t \mathbf{X}_t^\top \right)^{-1} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{X}_t \varepsilon_t
 \end{aligned}$$

- 上述表达式同样适用于包含常数项的一般形式 AR(p) 模型

线性回归 OLS 估计的一致性：一般情形

- OLS 回归的标准假设：

- ① $\{X_t\}$ 平稳，故交叉 2-阶矩矩阵 $M_{K \times K} = \mathbb{E}X_t X_t^T$ 存在且可逆，即 M^{-1} 存在

- ② $\{\varepsilon_t\}$ 为 iid 序列，且给定 X_t 时的条件均值为 0，即 $\mathbb{E}[\varepsilon_t | X_t] = 0$ ；由此知

$$\mathbb{E}X_t \varepsilon_t = \mathbf{0}_{K \times 1}$$

- 在此组假设之下，应用大数定律

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t X_t^T \right)^{-1} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t \varepsilon_t &\xrightarrow{\text{a.s.}} M_{K \times K}^{-1} \mathbf{0}_{K \times 1} \\ &= \mathbf{0}_{K \times 1} \end{aligned}$$

故 $\hat{\beta}_T \xrightarrow{\text{a.s.}} \beta_0$ ，即 OLS 估计量具有一致性

OLS 估计对应的总体表达式

- 给定回归模型 $Y_t = \mathbf{X}_t^T \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t$
- 对给定样本 $\{Y_t, \mathbf{X}_t\}_{t=1}^T$, $\boldsymbol{\beta}$ 的 OLS 是最小化残差平方和 $\min_{\boldsymbol{\beta}} \sum_t \varepsilon_t^2 = \min_{\boldsymbol{\beta}} \sum_t (Y_t - \mathbf{X}_t^T \boldsymbol{\beta})^2$ 的解
- 给定线性回归基础假设 $\mathbb{E}[\varepsilon_t | \mathbf{X}_t] = 0$, 可以在回归模型两端乘以 \mathbf{X}_t 并取期望:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{X}_t Y_t] &= \mathbb{E}[\mathbf{X}_t \mathbf{X}_t^T] \boldsymbol{\beta} + \mathbb{E}[\mathbf{X}_t \varepsilon_t] = \mathbb{E}[\mathbf{X}_t \mathbf{X}_t^T] \boldsymbol{\beta} \\ \implies \boldsymbol{\beta} &= (\mathbb{E}[\mathbf{X}_t \mathbf{X}_t^T])^{-1} \mathbb{E}[\mathbf{X}_t Y_t] \end{aligned}$$

- 上式对应于 OLS 样本估计表达式

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_T = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} = \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{X}_t \mathbf{X}_t^T \right)^{-1} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{X}_t Y_t$$