

国际金融试验班 2022 年秋 · 时间序列

# 第 6 讲：ARMA 过程的表示与性质

授课人：刘 岩

武汉大学经管学院金融系

2022 年 10 月 10 日

## 本讲内容

- ① ARMA 过程及其表示
- ② ARMA 过程的性质
- ③ AR 过程的矩估计

## 本节内容

- ① ARMA 过程及其表示
- ② ARMA 过程的性质
- ③ AR 过程的矩估计

## ARMA 过程的定义

- ARMA: 自回归移动平均 (autoregressive moving average)
- ARMA( $p, q$ ):  $p$ -阶自回归,  $q$ -阶移动平均,  $\{\varepsilon_t\}$  为白噪声

$$X_t = \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}, \quad \phi_p, \theta_q \neq 0$$

- 滞后算子表示

$$A(\mathcal{L})X_t = B(\mathcal{L})\varepsilon_t,$$

$$A(\mathcal{L}) = 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i \mathcal{L}^i, \quad B(\mathcal{L}) = \sum_{j=0}^q \theta_j \mathcal{L}^j$$

## AR 过程与 MA 过程

- 若  $B(\mathcal{L}) = 1$ , 则  $A(\mathcal{L})X_t = \varepsilon_t$ , 称为 AR( $p$ ) 过程
  - 如  $A(\mathcal{L}) = 1 - \rho\mathcal{L}$ , 则是 AR(1) 过程
  - 若  $|\rho| < 1$ , 则  $(1 - \rho\mathcal{L})^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \mathcal{L}^i$  收敛
  - 此时  $X_t = A^{-1}(\mathcal{L})\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i}$
- 若  $A(\mathcal{L}) = 1$ , 则  $X_t = B(\mathcal{L})\varepsilon_t$ , 称为 MA( $q$ ) 过程
  - 如  $B(\mathcal{L}) = 1 + \theta\mathcal{L}$ , 则是 MA(1) 过程
  - 若  $|\theta| < 1$ , 则  $(1 + \theta\mathcal{L})^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-\theta)^j \mathcal{L}^j$  收敛
  - 此时有  $\varepsilon_t = B^{-1}(\mathcal{L})X_t = \sum_{j=0}^{\infty} (-\theta)^j X_{t-j}$

## ARMA 过程的特征多项式

- 给定 ARMA( $p, q$ ) 过程  $A(\mathcal{L})X_t = B(\mathcal{L})\varepsilon_t$
- 将  $A(\mathcal{L}) = 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i \mathcal{L}^i$  对应的多项式  $A(z) = 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i z^i$  称为 AR 部分的 特征多项式 (characteristic polynomial)
- 将  $B(\mathcal{L}) = 1 + \sum_{j=1}^q \theta_j \mathcal{L}^j$  对应的多项式  $B(z) = 1 + \sum_{j=1}^q \theta_j z^j$  称为 MA 部分的 特征多项式
- 特征多项式的 **零点** 具有重要的性质!

## 特征多项式分解

- 代数基本定理：考虑  $n$ -阶多项式  $P(z) = z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_n$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , 则  $P(z)$  在复平面  $\mathbb{C}$  有  $n$  个零点  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$
- $P(z)$  可写为

$$P(z) = (z - z_1) \times \cdots \times (z - z_n)$$

- 若特征多项式为  $P(z)$ , 则对应的滞后算子多项式  $P(\mathcal{L})$  可分解为

$$P(\mathcal{L}) = (\mathcal{L} - z_1) \times \cdots \times (\mathcal{L} - z_n)$$

## ARMA 过程的平稳性

- 有限阶  $MA(q)$  过程一定是平稳过程
  - 请验证!
- $ARMA(p, q)$  平稳性决定于 AR 部分特征多项式  $A(z)$  的零点分布
- 首先说明, 如果  $\{Y_t\}$  是平稳过程, 那么当复数  $\rho \in \mathbb{C}$  的模长 (modulus)  $|\rho| < 1$  时, 由  $(1 - \rho\mathcal{L})X_t = Y_t$  所确定的  $\{X_t\}$  也是平稳过程
- 再说明, 如果  $A(z)$  零点均位于复平面单位圆之外, 则  $A(\mathcal{L})X_t = B(\mathcal{L})\varepsilon_t$  确定的  $\{X_t\}$  是平稳过程



## 平稳 ARMA 过程与 Wold 表示

- 令  $z_1, \dots, z_p$  为平稳 ARMA( $p, q$ ) 过程 AR 部分特征多项式零点, 则  $|z_1|, \dots, |z_p| > 1$ , 且有

$$A(z) = \left(1 - \frac{1}{z_1}z\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{z_p}z\right)$$

- 因此  $A(\mathcal{L})X_t = B(\mathcal{L})\varepsilon_t$  可写为

$$\left(1 - \frac{1}{z_1}\mathcal{L}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{z_p}\mathcal{L}\right) X_t = B(\mathcal{L})\varepsilon_t \Rightarrow X_t = \frac{1}{1 - \frac{1}{z_1}\mathcal{L}} \cdots \frac{1}{1 - \frac{1}{z_p}\mathcal{L}} B(\mathcal{L})\varepsilon_t$$

- 注意到  $1/|z_1|, \dots, 1/|z_p| < 1$ , 且  $B(\mathcal{L})\varepsilon_t$  平稳, 故  $X_t$  平稳

## MA 过程的可逆性

- 前面看到, MA(1)  $X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$ , 如果  $|\theta| < 1$ , 则有  $\varepsilon_t = (1 + \theta\mathcal{L})^{-1}X_t$ , 亦为平稳过程
- 有限阶 MA( $q$ ) 过程,  $X_t = B(\mathcal{L})\varepsilon_t$ , 若特征多项式  $B(w) = (w - w_1)\cdots(w - w_q)$  的零点  $w_1, \dots, w_q$  均在复平面单位圆之外, 则称  $X_t$  可逆 (invertable), 且有

$$\varepsilon_t = B^{-1}(\mathcal{L})X_t = \frac{(-1)^q}{w_1 \cdots w_q} \frac{1}{1 - \frac{1}{w_1}\mathcal{L}} \cdots \frac{1}{1 - \frac{1}{w_q}\mathcal{L}} X_t$$

- ARMA( $p, q$ ) 过程称为可逆的, 若其 MA 部分可逆

## ARMA 过程与可约性

- 考虑“形式上”的 ARMA(2, 1) 过程  $X_t = X_{t-1} - 0.25X_{t-2} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$ , 对应的特征多项式为

$$A(\mathcal{L}) = 1 - \mathcal{L} + 0.25\mathcal{L}^2 = (1 - 0.5\mathcal{L})^2, \quad B(\mathcal{L}) = 1 - 0.5\mathcal{L}$$

$$\Rightarrow (1 - 0.5\mathcal{L})^2 X_t = (1 - 0.5\mathcal{L})\varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow (1 - 0.5\mathcal{L})X_t = \varepsilon_t, \quad \text{ARMA}(1, 0)!$$

- 此 ARMA(2, 1) 过程实质是一个 ARMA(1, 0) 过程
- 为避免此情形, 一般均要求  $A(z)$  的零点  $\{z_1, \dots, z_p\}$  与  $B(z)$  的零点  $\{w_1, \dots, w_q\}$  **互不相同**
  - 若有  $z_i = w_j$ , 称该过程可约 (reducible); 若  $X_t$  是 ARMA( $p, q$ ) 过程, 一般要求其不可约

## 本节内容

- ① ARMA 过程及其表示
- ② ARMA 过程的性质
- ③ AR 过程的矩估计

## MA 过程的无条件矩 (unconditional moments)

- 给定 MA( $q$ ) 过程

$$X_t = \mu + \theta_0 \varepsilon_t + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

- 其期望为  $\mathbb{E}X_t = \mu$
- 方差为  $\text{var}X_t = \sigma_X^2 = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^q \theta_j^2$
- 自协方差为

$$\sigma_X^2(k) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{q-k} \theta_j \theta_{j+k}, & k = 0, \dots, q \\ 0, & k > q \end{cases}$$

## AR(1) 过程的无条件矩

- 给定 AR(1) 过程

$$X_t = \mu + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad |\phi| < 1$$

- 其期望为  $\mathbb{E}X_t = \frac{\mu}{1-\phi}$
- 方差为  $\text{var}X_t = \sigma_X^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}$
- 自协方差为

$$\sigma_X^2(k) = \phi^k \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}$$

- 自相关系数为  $\rho_X(k) = \phi^k$

## AR(1) 过程自协方差

- 计算可知，对平稳 AR(1) 过程有

$$\sigma_X^2(k) = \phi^k \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi^2}$$

- 由此，可将高阶自协方差写为

$$\sigma_X^2(k) = \phi^k \sigma_X^2(0)$$

- 另一种写法：首先，由  $X_{t-1}$  Wold 表示知其仅与  $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots$  有关，故  $\mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-1}] = 0$ ，进而有

$$X_t X_{t-1} = \phi X_{t-1}^2 + \varepsilon_t X_{t-1} \Rightarrow \mathbb{E}[X_t X_{t-1}] = \phi \mathbb{E}[X_{t-1}^2] + 0 \Rightarrow \sigma_X^2(1) = \phi \sigma_X^2(0)$$

$$X_t X_{t-(k+1)} = \phi X_{t-1} X_{t-(k+1)} + \varepsilon_t X_{t-(k+1)} \Rightarrow \sigma_X^2(k+1) = \phi \sigma_X^2(k)$$

AR( $p$ ) 过程的无条件矩

- 给定平稳 AR( $p$ ) 过程

$$X_t = \mu + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t,$$

即特征多项式  $A(z) = 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i z^i$  满足零点  $\{z_1, \dots, z_p\}$  在单位圆外

- 其期望为  $\mathbb{E}X_t = \frac{\mu}{A(1)}$
- 方差及自协方差的一般表达式要复杂一些



## AR(2) 过程的例子

- 给定平稳 AR(2) 过程  $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$ , 特征多项式  $A(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$  的两个零点均位于单位圆之外
- 两端分别乘以  $X_{t-1}, X_{t-2}$  可得

$$\sigma_X^2(1) = \phi_1 \sigma_X^2(0) + \phi_2 \sigma_X^2(1)$$

$$\sigma_X^2(2) = \phi_1 \sigma_X^2(1) + \phi_2 \sigma_X^2(0)$$

- 两端乘以  $X_t$ , 注意到  $\text{cov}(X_t, \varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$ , 可得

$$\sigma_X^2(0) = \phi_1 \sigma_X^2(1) + \phi_2 \sigma_X^2(2) + \sigma_\varepsilon^2$$

## AR(2) 过程的例子

- 上述 3 个方程，可以看做是  $\sigma_X^2(k)$ ,  $k = 1, \dots, 3$  的线性方程组

$$\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 - 1 & 0 \\ \phi_2 & \phi_1 & -1 \\ 1 & -\phi_1 & -\phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_X^2(0) \\ \sigma_X^2(1) \\ \sigma_X^2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_\varepsilon^2 \end{bmatrix}$$

- 求解上述方程，可得到  $\sigma_X^2(k)$ ,  $k = 1, \dots, 3$  的表达式
  - 思考：平稳性与上述方程系数矩阵的可逆性有什么关系？
- 使用 Cramer 法则，可直接写出系数矩阵  $\Phi$  的逆：

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{\det \Phi} \Phi^*,$$

其中  $\Phi^*$  为  $\Phi$  的伴随矩阵

## AR(2) 过程的例子

- 给定  $\sigma_X^2(k)$ ,  $k = 1, \dots, 3$ , 可以递归计算平稳 AR(2) 过程的任意阶自协方差  $\sigma_X^2(k)$
- 在  $X_{t+k} = \phi_1 X_{t+k-1} + \phi_2 X_{t+k-2} + \varepsilon_{t+k}$ ,  $k \geq 2$  两端分别乘以  $X_t$  可得

$$\sigma_X^2(k) = \phi_1 \sigma_X^2(k-1) + \phi_2 \sigma_X^2(k-2),$$

进一步可写为

$$\begin{bmatrix} \sigma_X^2(k) \\ \sigma_X^2(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_X^2(k-1) \\ \sigma_X^2(k-2) \end{bmatrix}$$

## Yule-Walker 方程

- 给定平稳 AR( $p$ ) 过程  $X_t = \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t$ , 特征多项式  $A(z) = 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i z^i$  的  $p$  个零点均位于单位圆之外
- 两端依次乘以  $X_{t-1}, \dots, X_{t-p}$ , 可得

$$\begin{bmatrix} \sigma_X^2(1) \\ \vdots \\ \sigma_X^2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2(0) & \cdots & \sigma_X^2(p-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_X^2(p-1) & \cdots & \sigma_X^2(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix}$$

- 两端乘以  $X_t$  可得:

$$\sigma_X^2(0) = \sum_{i=1}^p \phi_i \sigma_X^2(i) + \sigma_\varepsilon^2$$

- 上述两组方程, 称为 Yule-Walker 方程

## 本节内容

- ① ARMA 过程及其表示
- ② ARMA 过程的性质
- ③ AR 过程的矩估计

## AR(1) 的估计：自回归系数

- 假设数据（观测值）序列  $\{X_t\}_{t=1}^T$  满足一个 AR(1) 过程  $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$ ，但参数  $\phi, \sigma_\varepsilon$  未知
  - 这个 AR(1) 过程就是  $\{X_t\}$  的 DGP
- 问题：如何估计  $\phi$  以及  $\sigma_\varepsilon$ ？
- 联想 AR(1) 的 Yule-Walker 方程  $\phi = \sigma_X^2(1)/\sigma_X^2(0)$ ，可以得到一个  $\phi$  的一个估计值

$$\hat{\phi} = \frac{\hat{\sigma}_X^2(1)}{\hat{\sigma}_X^2(0)}$$

其中， $\hat{\sigma}_X^2(1), \hat{\sigma}_X^2(0)$  分别为  $\{X_t\}$  的 1-阶样本自协方差与样本方差；后两者的一致性保证了  $\hat{\phi}$  的一致性

## AR(1) 的估计：冲击项方差

- 暂时回归  $\sigma_\varepsilon^2$  的估计问题
- 利用大数律，自然的想法是利用样本方差  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2$  来估计  $\sigma_\varepsilon^2$ ；但唯一的观测值为  $\{X_t\}$ ，而非  $\{\varepsilon_t\}$
- 但是，若有一致估计量  $\hat{\phi}_T$ ，则大样本下

$$e_t = X_t - \hat{\phi}_T X_{t-1} \xrightarrow{\text{a.s.}} X_t - \phi X_{t-1} = \varepsilon_t$$

因此，可利用冲击项  $\varepsilon_t$  的样本估计值  $e_t$  来估计  $\sigma_\varepsilon^2$ ：

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T e_t^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T (X_t - \hat{\phi}_T X_{t-1})^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} \sigma_\varepsilon^2$$

AR( $p$ ) 的估计：自回归系数

- 假设数据（观测值）序列  $\{X_t\}_{t=1}^T$  满足一个 AR( $p$ ) 过程  $X_t = \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t$ ，但参数  $\phi_1, \dots, \phi_p, \sigma_\varepsilon$  未知
- 类似于 AR(1)，如果有  $\phi_i$  的一致估计  $\hat{\phi}_i$ ，则可计算样本冲击  $e_t$ ，从而用  $\hat{\sigma}_e^2$ （一致）估计  $\sigma_\varepsilon^2$
- 从 Yule-Walker 方程出发，可以得到

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2(0) & \cdots & \sigma_X^2(p-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_X^2(p-1) & \cdots & \sigma_X^2(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_X^2(1) \\ \vdots \\ \sigma_X^2(p) \end{bmatrix}$$



AR( $p$ ) 自回归系数的 Yule-Walker 估计

- 给定样本  $T$  足够大, 则样本自协方差是对  $X_t$  总体自协方差的一致估计
- 在 Yule-Walker 方程中应用样本自协方差, 则可以得到  $\phi_1, \dots, \phi_p$  的一致估计

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_X^2(0) & \cdots & \hat{\sigma}_X^2(p-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\sigma}_X^2(p-1) & \cdots & \hat{\sigma}_X^2(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_X^2(1) \\ \vdots \\ \hat{\sigma}_X^2(p) \end{bmatrix}$$