

国际金融试验班 2022 年秋 · 时间序列

第 15 讲：状态空间模型与 Markov 区制转换模型简介

授课人：刘 岩

武汉大学经管学院金融系

2022 年 12 月 12 日

本讲内容

- 1 状态空间模型
- 2 Markov 区制转换模型

本节内容

1 状态空间模型

2 Markov 区制转换模型

状态空间模型

- 前面课程中介绍的平稳时间序列，其动态特征都通过动态方程直接进行刻画
 - ARMA/VAR/ARCH/GARCH
 - 其核心都可以归结为（低阶）AR 动态方程 + （低阶）MA 动态方程
- 在基础的时间序列动态方程之上，可以考虑复合的时间序列过程：状态变量满足一个动态方程，观测变量又是状态变量的一个函数，以及可能的额外误差项（噪音），即状态-空间表示 (state-space representation)

状态空间模型的例子

- 考虑 $Y_t = X_t + w_t$, 其中 $\{w_t\}$ 为白噪声过程; 而 X_t 为 AR(1) 过程
 $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$, $\{\varepsilon_t\}$ 为白噪声过程, 且与 w_t 无关
- 上述动态系统可以写为两 (组) 方程的状态空间表示:

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = X_t + w_t$$

其中第一个方程为状态动态 (state dynamics) 方程, 第二个方程为空间观测 (space observation) 方程

- 进一步变化可以发现 Y_t 为 ARMA(1,1) 过程:

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \underbrace{w_t - \phi w_{t-1} + \varepsilon_t}$$

可验证这是一个 MA(1) 过程

状态空间模型的常见形式

- 状态空间模型的常见形式：状态变量 $\mathbf{X}_t$ 为 $r \times 1$ 向量，观测变量 $\mathbf{Y}_t$ 为 $n \times 1$ 向量，外生变量 $\mathbf{Z}_t$ 为 $k \times 1$ 向量，满足如下（线性）动态方程系统

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{F}\mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{v}_t$$

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{H}^\top \mathbf{X}_t + \mathbf{A}^\top \mathbf{Z}_t + \mathbf{w}_t$$

- 其中 $\mathbf{v}_t$ 为状态方程零均值白噪声冲击（向量），满足 $\mathbb{E}\mathbf{v}_t\mathbf{v}_t^\top = \mathbf{Q}$ ，
 $\mathbb{E}\mathbf{v}_t\mathbf{v}_{t-j}^\top = \mathbf{0} \forall j \neq 0$ ； $\mathbf{w}_t$ 为观测方程零均值白噪声冲击（向量），满足
 $\mathbb{E}\mathbf{w}_t\mathbf{w}_t^\top = \mathbf{R}$ ， $\mathbb{E}\mathbf{w}_t\mathbf{w}_{t-j}^\top = \mathbf{0} \forall j \neq 0$ ；且两组白噪声无关 $\mathbb{E}\mathbf{v}_t\mathbf{w}_{t-j}^\top = \mathbf{0} \forall j$
- $\mathbf{F}$ 为状态动态方程系数矩阵，该方程说明 $\mathbf{X}_t$ 是一个 VAR 过程； $\mathbf{H}, \mathbf{A}$ 为观测方程系数矩阵，写转置形式是与多元回归方程写法保持一致

状态空间模型的等价形式与变量关系

- 将外生变量 Z_t 在观测方程中单独写出，通常是为了突出观测变量 Y_t 不仅受内生状态变量 X_t 影响
 - 特例：观测方程中的常数项， $Z_t = [1, \dots, 1]^T$
- 但实际上可以将 Z_t 与 X_t 合并，定义 $\tilde{X}_t = [X_t^T, Z_t^T]^T$ ，并将各系数矩阵、白噪声向量用零矩阵（分块）做相应拓展，可以得到如下等价的状态空间表示：

$$\tilde{X}_t = \tilde{F}\tilde{X}_{t-1} + \tilde{v}_t$$

$$Y_t = \tilde{H}^T \tilde{X}_t + w_t$$

- Z_t 的外生性体现在 $\mathbb{E}Z_t v_t^T = \mathbb{E}Z_t w_t^T = 0$

ARMA 过程的状态空间模型估计

- ARMA(p, q) 过程的估计, 由于 MA(q) 部分的存在, 常规方法不易处理
 - 可以用 OLS 辅助回归的方法, 但必然带来有限样本偏误
 - 常规似然函数高度非线性, 数值求解稳健性较低
- 状态空间表示提供了一个更便利的极大似然估计路径
 - 需要使用 Kalman 滤波 (filter) 递归算法对似然函数进行计算
 - 该方法对一般的状态空间模型均适用

ARMA 过程的状态空间表示：直接方法——兜圈子

- 考虑 ARMA(p, q) 过程

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \theta_0 \varepsilon_t + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

- 定义 $\mathbf{X}_t = [Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}, \varepsilon_t, \dots, \varepsilon_{t-q}]^T$, 则可对应定义 F 与 v_t , 使得
 $\mathbf{X}_t = F\mathbf{X}_{t-1} + v_t$

- 相应的

$$H = [\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_0, \dots, \theta_q]$$

则 $Y_t = H\mathbf{X}_t$

- 上述状态空间表示不简洁： F 中同样包含 $\{\phi_i\}, \{\theta_j\}$, 实质是同义反复

ARMA 过程的状态空间表示：紧凑方法

- 令 $r = \max(p, q + 1)$ ，并补充定义 $\phi_i = 0$ ，若 $p < i \leq r$ ；以及 $\theta_j = 0$ ，若 $q < j \leq r$ ；此时 Y_t 可写为

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_r Y_{t-r} + \theta_0 \varepsilon_t + \cdots + \theta_{r-1} \varepsilon_{t-r+1}$$

- 定义 $\mathbf{X}_t = [X_{1t}, \dots, X_{rt}]$ 满足如下状态方程

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_{r-1} & \phi_r \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}_{t-1} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

定义观测方程 $Y_t = [\theta_0, \dots, \theta_{r-1}] \mathbf{X}_t$ ，可验证 Y_t 满足前述 $\text{ARMA}(p, q)$ 方程

ARMA 过程状态空间表示：推导

- 从状态方程第二行开始可知 $X_{2t} = X_{1t-1}, \dots, X_{rt} = X_{r-1,t-1}$, 故

$$X_{jt} = X_{j-1,t-1} = \mathcal{L} X_{j-1,t} = \dots = \mathcal{L}^{j-1} X_{1t}$$
- 从状态方程第一行可知

$$X_{1t} = \phi_1 X_{1t-1} + \dots + \phi_r X_{r,t-1} + \varepsilon_t = (\phi_1 + \phi_2 \mathcal{L} + \dots + \phi_r \mathcal{L}^{r-1}) X_{1t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow (1 - \phi_1 \mathcal{L} - \phi_2 \mathcal{L}^2 - \dots - \phi_r \mathcal{L}^r) X_{1t} = \varepsilon_t$$

- 观测方程可写为

$$Y_t = (\theta_0 + \theta_1 \mathcal{L} + \dots + \theta_{r-1} \mathcal{L}^{r-1}) X_{1t}$$

两端乘以 $(1 - \phi_1 \mathcal{L} - \phi_2 \mathcal{L}^2 - \dots - \phi_r \mathcal{L}^r)$ 可得

$$(1 - \phi_1 \mathcal{L} - \phi_2 \mathcal{L}^2 - \dots - \phi_r \mathcal{L}^r) Y_t = (\theta_0 + \theta_1 \mathcal{L} + \dots + \theta_{r-1} \mathcal{L}^{r-1}) \varepsilon_t$$

本节内容

1 状态空间模型

2 Markov 区制转换模型

Markov 区制转换模型介绍

- 区制转换 (regime switching) 模型：时间序列 $\{X_t\}$ 的动态变化方程，不但取决于 X_t 滞后期及白噪声冲击项，还取决于离散区制变量 $s_t \in S \equiv \{1, \dots, S\}$
- 典型例子：GDP 增速序列的时序变化，不但取决于滞后期，还取决经济整体情况是扩张 (expansion) 期还是紧缩 (recession) 期，可用两区制 $s_t \in \{1, 2\}$ 模型来描述
- Markov 区制转换 (MRS)： s_t 的变化可以用一个 Markov 链（马氏链）来描述：给定当前区制取值 $s_t = i$ ，则下一期区制取值 $s_{t+1} \in S$ 的（条件）分布 $P(s_{t+1}|s_t = i)$ 完全知晓

Markov 链介绍

- Markov 链是一类应用最广泛的随机过程模型，其核心特征是给定当前状态 s_t ，下期状态 s_{t+1} 的条件分布完全确定，即 $\mathbb{P}(s_{t+1} = j | s_t = i)$ 完全确定
 - 此处 s_t 理解为一般的“状态”概念，而非前页区制
- 上述条件概率又称为（条件）转移概率 (transition probability)；若转移概率取值与 t 无关，只与前后两期的状态取值 i, j 有关，则称该 Markov 链为时齐 (time homogeneous) Markov 链，并将转移概率记做 $p_{ij} \equiv \mathbb{P}(s_{t+1} = j | s_t = i)$
- 转移概率可以写为 $S \times S$ 矩阵 $\mathbf{P}$ ：

$$\mathbf{P} = [p_{ij}]_{1 \leq i, j \leq S} = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{S1} & \cdots & p_{SS} \end{bmatrix}$$

且 $\mathbf{P}$ 满足每一行求和为 1； $\mathbf{P}$ 成为转移矩阵 (transition matrix)

时齐 Markov 链的分布及动态演化

- 若 t 期状态 s_t 的分布为 $\pi_t = [\pi_{1t}, \dots, \pi_{St}]$, 则由转移概率定义可知 s_{t+1} 的概率分布为

$$\mathbb{P}(s_{t+1} = j) = \sum_{i \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(s_{t+1} = j, s_t = i) = \sum_{i \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(s_t = i) \mathbb{P}(s_{t+1} = j | s_t = i) = \sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_{it} p_{ij}$$

- 写为矩阵形式, 可知

$$\pi_{t+1} = [\pi_{1t+1}, \dots, \pi_{St+1}] = \pi_t P$$

- 给定初始分布 $s_0 \sim \pi_0$, s_t 的分布为 $\pi_t = \pi_0 P^t$
 - 有一整套关于 Markov 链极限分布 (limiting distribution) 的理论, 即分析 $\lim_{t \rightarrow \infty} P^t$ 的性质

时齐 Markov 链的平稳分布

- 对转移矩阵为 $\mathbb{P} = [p_{ij}]_{i,j \in \mathcal{S}}$ 的时齐 Markov 链, 若分布 $\pi = [\pi_1, \dots, \pi_S]$ 满足 $\pi = \pi P$, 则称 π 为该 Markov 链的平稳分布 (stationary distribution)
 - 平稳分布又称为不变分布 (invariant distribution)
- 平稳分布的涵义: 若 s_t 处于平稳分布, 则 $s_{t+\tau}$, $\tau \geq 1$ 的分布都为平稳分布, 即分布不再变化
- 考虑 $S = 2$ 的时齐 Markov 链, 转移矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} \rho & 1 - \rho \\ 1 - \rho & \rho \end{bmatrix}$$

其中 $\rho \in (0, 1)$, 则可验证平稳分布 $\pi = [0.5, 0.5]$

Markov 区制转换自回归模型

- 时间序列中，一类应用极广的区制转换模型为 Markov 区制转换 p -阶自回归 (MRS AR(p)) 模型，其一般形式可写为

$$X_t - \mu(s_t) = \phi_1(s_t)(X_{t-1} - \mu(s_{t-1})) + \cdots + \phi_p(s_t)(X_{t-p} - \mu(s_{t-p})) + \sigma(s_t)\varepsilon_t$$

其中 s_t 表示 t 期所处区制，为时齐 Markov 链； $\mu(\cdot)$, $\phi_j(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ 为依赖于区制的截距项、自回归系数及白噪声标准差； $\{\varepsilon_t\}$ 为 iid 白噪声序列，通常假设与 $\{s_t\}$ 相互独立

- 这类模型可以描述时间序列中离散变化的水平值、自相关性、波动率跳跃
- MRS AR 模型通常都是用极大似然估计方法进行参数估计
 - 技术介绍可见 Hamilton (2016) “Macroeconomic Regimes and Regime Shifts,” Handbook of Macroeconomics, vol.2A, chapter 3

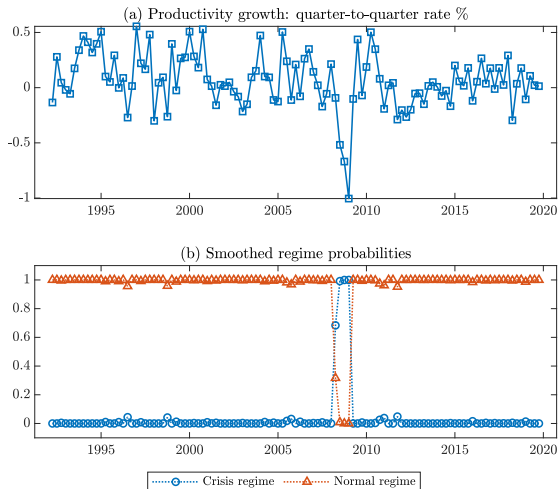
MRS AR(1) 示例

- 很多国家的产出或生产率 (TFP 或劳动生产率) 会呈现区制转移特征：正常时期是一个区制，危机时期是一个区制
- 最简单的建模方式为 MRS AR(1) 模型：

$$X_t = (1 - \rho(s_t))\mu(s_t) + \rho(s_t)X_{t-1} + \sigma(s_t)\varepsilon_t$$

- 这类特定的模型可以用迭代 EM (expectations maximization) 算法大幅提高 MLE 的计算效率

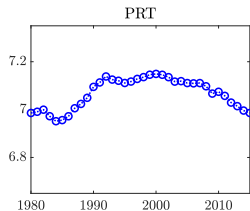
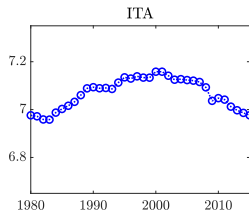
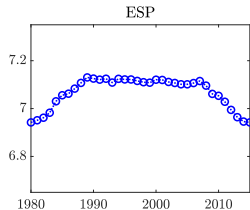
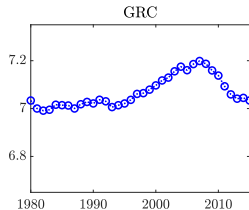
意大利劳动生产率增速序列的 MRS AR(1) 建模



估计结果

	$\mu(s)$	$\rho(s)$	$\sigma(s)$	P	$s' = 1$	$s' = 2$	不变分布
$s = 1$ 危机	-0.0336	0.9018	0.0009	$s = 1$	0.6633	0.3367	0.0372
$s = 2$ 正常	0.0009	0.2167	0.0020	$s = 2$	0.0130	0.9870	0.9628

欧债危机示例：GIPS 四国劳动生产率序列



欧债危机示例：GIPS 四国劳动生产率 MRS AR(1) 建模估计

