

国际金融试验班 2022 年秋 · 时间序列

# 第 13 讲：随机波动率与条件异方差模型

授课人：刘 岩

武汉大学经管学院金融系

2022 年 11 月 28 日

## 本讲内容

- 1 波动率的时间序列特征
- 2 ARCH 模型
- 3 GARCH 模型

## 本节内容

- 1 波动率的时间序列特征
- 2 ARCH 模型
- 3 GARCH 模型

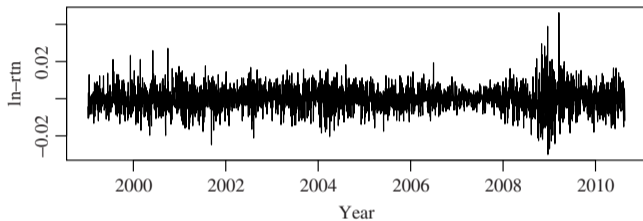
## 金融时间序列中的波动率动态特征

随机波动率 (stochastic volatility): 金融时间序列 (如收益率) 各个时期的波动水平并非恒定不变, 而会随时间发生变化; 可总结为如下特征

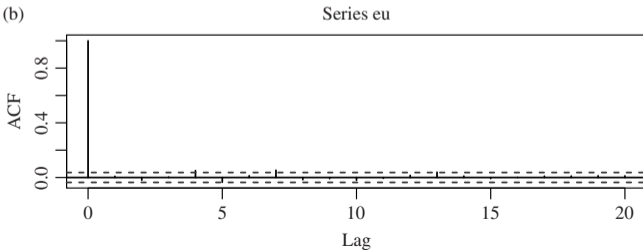
- ① 波动率聚集 (clustering): 波动率会在一定时期 (通常较短) 明显变高, 而在其他时期 (通常较长) 维持低位
- ② 波动率的跳跃不常见, 而倾向于连续变化
- ③ 波动率是在有限范围内变化, 而不会趋近于无穷
- ④ 时间序列自身的水平值发生较大变化后, 波动率通常会增加
  - 如资产价格序列发生明显上升或下降后, 其波动率会出现上升趋势

示例：美元-欧元汇率日度收益率及自相关性，1999.1.4–2010.8.4

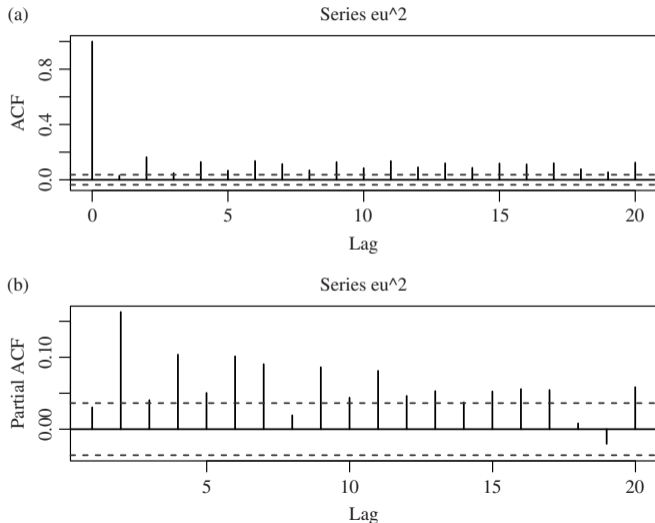
(a)



(b)



## 示例：前页收益率平方项具有自相关性



## 随机波动率：理论内涵与测算

- 随机波动率旨在捕捉可观测的时间序列  $\{X_t\}$  的二阶矩随时间随机变化的特征
  - 以收益率序列  $\{r_t\}$  为例，若  $\Omega_{t-1}$  表示  $t-1$  期的信息集（如到该期为止所有的公开信息，包括收益率本身），则可计算条件期望收益及其条件方差

$$\mu_t = \mathbb{E}[r_t | \Omega_{t-1}], \quad \sigma_t^2 = \mathbb{E}[(r_t - \mu_t)^2 | \Omega_{t-1}]$$

后者即称为  $\{r_t\}$  的（条件）波动率

- 随机波动率：若  $\sigma_t^2$  为具有一定概率结构的随机过程
- 随机波动率的理论测度：  $\sigma_t^2 = \mathbb{E}[(X_t - \mu_t)^2 | \Omega_{t-1}]$  的计算依赖于对  $\{X_t\}$  时序模型的设定

## 随机波动率：样本测算与近似

- 给定样本  $\{X_t\}_{t=1}^T$ ，虽然  $\sigma_t^2$  的理论值依赖于模型设定，但仍然可以通过  $X_t^2$ ，反映其波动率的随机动态特征
  - 第5页计算收益率平方项自相关系数及偏自相关系数的原因
  - 更精确的“直接”测算：建立  $\{X_t\}$  本身水平值的时序模型，如  $AR(p)$ ，则可以计算  $t-1$  期  $X_t$  的最小均方预测  $\hat{X}_{t|t-1}$ ，进而用预测误差平方项  $(X_t - \hat{X}_{t|t-1})^2$  来刻画潜在的随机波动率
- 另一种方法：不同时间段波动率实现值 (realized volatility)
  - 如用每个月各个日度回报率来计算该月的实现波动率
  - 或者更为粗糙但常用的滚动窗口波动率 (rolling window volatility)：用  $t$  到  $t-m$  期的实现值  $\{X_{t-i}\}_{i=0}^m$  来计算样本方差  $\hat{\sigma}_{m,t}^2$



## 本节内容

- 1 波动率的时间序列特征
- 2 ARCH 模型
- 3 GARCH 模型

## ARCH 模型的基本结构

- ARCH (autoregressive conditional heteroskedastic) 模型：自回归条件异方差，Robert Engle 1982 年提出
- $m$ -阶 ARCH 模型 ARCH( $m$ ) 的经典表示：给定 iid 白噪声过程  $\{v_t\}$ ，期望  $\mathbb{E}v_t = 0$ ，方差  $\sigma_v^2 = 1$ ，则  $u_t = \sqrt{h_t} \cdot v_t$  称为 ARCH( $m$ ) 模型，若  $h_t$  满足

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m u_{t-m}^2$$

- **参数限制**： $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$  并不能任意取值，而需要满足一些列限定条件，才能保证  $h_t$  进而  $u_t$  有意义
- 常用记号：经常将  $h_t$  记做  $\sigma_t^2$ ，便于提示“随机波动率”的本意

## ARCH 模型的性质：条件期望与方差

- 定义信息集  $\Omega_{t-1} = \{u_{t-1}, u_{t-2}, \dots\}$ , 则  $v_t$  独立于  $\Omega_{t-1}$
- 进一步有,  $\mathbb{E}[u_t | \Omega_{t-1}] = \sqrt{h_t} \mathbb{E}[v_t | \Omega_{t-1}] = \sqrt{h_t} \mathbb{E}v_t = 0$
- 由 ARCH 模型的定义可知  $u_t^2 = h_t \cdot v_t^2$ , 则

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[u_t^2 | \Omega_{t-1}] &= \mathbb{E}[(\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2) v_t^2 | \Omega_{t-1}] \\ &= (\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2) \mathbb{E}[v_t^2 | \Omega_{t-1}] \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2 \end{aligned}$$

其中第 2 个等号的原因在于  $\mathbb{E}[v_t^2 | \Omega_{t-1}] = \mathbb{E}[v_t^2] = 1$

- 由此知,  $u_t$  的条件方差  $\sigma_{u,t}^2 \equiv \text{var}(u_t | \Omega_{t-}) = \mathbb{E}[u_t^2 | \Omega_{t-1}]$  由其自身的滞后项平方决定

## ARCH 过程参数限制

- 首先，由于  $\mathbb{E}[u_t^2 | \Omega_{t-1}] = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m u_{t-m}^2$ ，为确保右端取值大于 0，故要求

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0 \quad (1)$$

- 其次，由于  $\mathbb{E}[u_t^2 | \Omega_{t-1}] = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m u_{t-m}^2$  具有一个以  $u_t^2$  为变元的 AR(m) 过程，因此要求其所对应的特征多项式  $P(z)$  满足

$$P(z) = 1 - \alpha_1 z - \cdots - \alpha_m z^m \neq 0, \quad \forall |z| \leq 1 \quad (2)$$

即  $P(z)$  所有零点位于复平面单位圆外

## ARCH 过程的无条件矩

- 由  $\mathbb{E}[u_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[u_t|\Omega_{t-1}]] = \mathbb{E}[0] = 0$  可知  $u_t$  的 1-阶矩平稳
- 由

$$\mathbb{E}[u_t^2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[u_t^2|\Omega_{t-1}]] = \alpha_0 + \alpha_1\mathbb{E}[u_{t-1}^2] + \cdots + \alpha_m\mathbb{E}[u_{t-m}^2]$$

可知, 若  $\mathbb{E}[u_t^2]$  平稳, 则

$$\mathbb{E}[u_t^2] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_m}$$

- $P(z)$  零点位于单位圆外意味着  $P(1) = 1 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_m \neq 0$ , 故  $u_t$  无条件 2-阶矩大于 0 进一步限制了参数取值

$$\alpha_0 > 0, \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_m < 1 \quad (3)$$

## ARCH 过程是鞅差过程

- ARCH 过程满足鞅差过程的定义： $\mathbb{E}[u_t | \Omega_{t-1}] = 0$
- 故 ARCH 过程不具有序列相关性： $\forall j = 1, 2, \dots,$

$$\mathbb{E}[u_t u_{t-j}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[u_t u_{t-j} | \Omega_{t-1}]] = \mathbb{E}[u_{t-j} \mathbb{E}[u_t | \Omega_{t-1}]] = 0$$

即  $\text{cov}(u_t, u_{t-j}) = 0$

## ARCH 模型的回归表示

- 定义  $\eta_t \equiv u_t^2 - \mathbb{E}[u_t^2 | \Omega_{t-1}]$ , 则可直接验证  $\{\eta_t\}$  为鞅差序列,  $\mathbb{E}[\eta_t] = \mathbb{E}[\eta_t | \eta_{t-1}, \eta_{t-2} \dots] = \mathbb{E}[\eta_t | \Omega_{t-1}] = 0$ 
  - 当参数  $\alpha_0, \dots, \alpha_m$  满足进一步条件时, 可以证明  $\mathbb{E}[\eta_t^2]$  存在, 故  $\{\eta_t\}$  是序列无关、鞅差白噪声过程
- 由  $\mathbb{E}[u_t^2 | \Omega_{t-1}] = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2$ , 可得 ARCH 模型的平方项自回归 AR( $m$ ) 表示:

$$u_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2 + \eta_t$$

- 此回归表示可用来对 ARCH 模型进行估计, 选择阶数  $m$ , 预测波动率, 或检验序列  $\{u_t\}_{t=1}^T$  是否具有 ARCH 特征
  - 借助上式可说明  $P(z)$  满足条件 (2) 时,  $u_t^2$  方为平稳序列

## ARCH 模型的极大似然估计

- ARCH 模型的常规估计方法为极大似然估计
- 假设  $v_t \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, 1)$ , 则  $u_t = \sqrt{h_t} \cdot v_t$  在  $\Omega_{t-1}$  下的条件概率密度为  $f(u_t | \Omega_{t-1}) = (2\pi h_t)^{-1} \exp(-0.5u_t^2/h_t)$
- 给定 ARCH( $m$ ) 样本序列  $\{u_t\}_{t=1}^T$ ,  $T > m$ , 则条件似然函数

$$L(u_{m+1}, \dots, u_T | \boldsymbol{\alpha}, u_1, \dots, u_m) = \prod_{t=m+1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(-\frac{u_t^2}{2h_t}\right)$$

其中  $h_t$  可以通过  $u_{t-1}, \dots$  等递归定义,  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_0, \dots, \alpha_m]^T$

- 另一个常见分布假设为  $v_t$  服从 iid 的 Student  $t$ -分布



## 本节内容

- 1 波动率的时间序列特征
- 2 ARCH 模型
- 3 GARCH 模型**

## ARCH 模型的优点与缺点

## 优点

- ① 可以产生波动率聚集： $h_t = \sigma_t^2$  增加，导致  $u_t^2$  上升，进而导致  $h_{t+1} = \sigma_{t+1}^2$  上升
- ②  $u_t$  序列有厚尾特征：可计算  $u_t$  峰度（当存在时）大于 3

## 缺点

- ① ARCH 模型对参数取值限制较多
- ② ARCH 模型的简单自回归结构导致其无法捕捉波动率变动的高频结构，进而容易造成波动率过度预测
- ③ ARCH 模型无法区分波动率变动的非线性特征，下一期波动率只取决于冲击  $v_t$  的平方
- ④ ARCH 模型并没有真正解释波动率变化的来源，而只是对其时序特征进行建模

## GARCH 模型的基本结构

- ARCH 模型的缺点带动了大量的后续研究，其中应用最广泛也最成功的，为 GARCH (generalized ARCH) 模型：Engle 的学生 Bollerslev 提出
  - GARCH 模型可以克服前述缺点 2，其拓展可以进一步克服缺点 3
- GARCH 模型 GARCH( $m, s$ ) 的经典表示：类似 ARCH，给定  $u_t = \sqrt{h_t} \cdot v_t$ ，条件方差  $h_t$  满足

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j h_{t-j}$$

- 与 ARCH 类似，此时有

$$\mathbb{E}[u_t^2 | \Omega_{t-1}] = h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j h_{t-j}$$

## GARCH 模型的特征

- 与 ARCH 类似，定义  $\eta_t = u_t^2 - \mathbb{E}[u_t^2 | \Omega_{t-1}] = u_t^2 - h_t$ ，则  $\{\eta_t\}$  为鞅差白噪声过程，且  $h_t = u_t^2 - \eta_t$
- 此时， $h_t$  定义式可以改写为

$$u_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p (\alpha_i + \beta_i) u_{t-i}^2 + \eta_t - \sum_{j=1}^s \beta_j \eta_{t-j}$$

其中  $p = \max(m, s)$ ；上式中对  $i > m$ ，补充定义  $\alpha_i = 0$ ，对  $i > s$  补充定义  $\beta_i = 0$

- 由上式可知，GARCH 模型下  $u_t^2$  是一个 ARMA( $\max(m, s), s$ ) 过程，其 MA( $s$ ) 部分可以捕捉波动率变动的高频特征

## GARCH 模型的参数限制

- 为保证  $h_t$  非负, 需要  $\alpha_0, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_s \geq 0$
- 为保证  $u_t^2$  平稳, 需要其 ARMA 表示中 AR 部分特征多项式

$$P(z) = 1 - (\alpha_0 + \beta_0)z - \dots - (\alpha_p + \beta_p)z^p \neq 0, \forall z \in \mathbb{C} \text{ s.t. } |z| \leq 1$$

- 为保证

$$\mathbb{E}[u_t^2] = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^p (\alpha_i + \beta_i)} > 0$$

需要  $\alpha_0 > 0$  与  $\sum_{i=1}^p (\alpha_i + \beta_i) < 1$

## GARCH 估计与示例

GARCH 模型通常也使用极大似然估计，其阶数确定可通过 AIC、BIC 等模型选择算法

- R 宏包 fGarch 提供了丰富的 GARCH 建模与分析选项
- 下图显示了对 Intel 股票 1973M1 到 2009M12 月度收益率进行 GARCH(1,1) 建模估计得到的波动率序列  $\sigma_t^2 = h_t$

