

国际金融试验班 2022 年秋 · 时间序列

第 11 讲：向量自回归模型

授课人：刘 岩

武汉大学经管学院金融系

2022 年 11 月 14 日

本讲内容

- 1 VAR 模型
- 2 VAR 平稳性和总体矩

本节内容

1 VAR 模型

2 VAR 平稳性和总体矩

VAR 模型基本形式

- 向量自回归 (vector autoregression, VAR) 模型: $K \times 1$ 随机向量 $\mathbf{X}_t$ 具有“自回归”结构
- VAR(p) 过程: $\mathbf{X}_t$ 满足下列 p -阶自回归方程

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{c} + \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{X}_{t-1} + \cdots + \mathbf{\Phi}_p \mathbf{X}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

其中 $p \geq 1$, $\mathbf{c}$ 为 $K \times 1$ 常数向量, $\mathbf{\Phi}_i$ 为 $K \times K$ 常数矩阵, $i = 1, \dots, p$

- $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 为向量白噪声, 协方差矩阵为 $\text{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbb{E} \boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t^\top = \mathbf{\Omega}$, 自协方差矩阵 $\mathbb{E} \boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i}^\top = \mathbf{0}_{K \times K}$, $\forall i \geq 1$
- 上述 VAR 模型又称为约化形式 (reduced form), 不包括对 $\mathbf{X}_t$ 变量间关系的额外限制

VAR 示例

- VAR 在经济学中的流行, 始于 Christopher Sims (1980) “Macroeconomics and Reality” *Econometrica*
 - 首次用 VAR 模型来讨论关键宏观经济变量的波动与交互依赖特征, 放弃了传统大型计量模型范式
 - 6 个变量, 货币总量, 产出, 失业率, 价格水平, 工资水平, 进口价格指数
- Stock and Watson (2001, *J. Econ. Perspective*) 3 变量 VAR:

$$\mathbf{X}_t = [u_t, \pi_t, i_t]^\top$$

u_t 为失业率, π_t 为通胀率, i_t 为基准利率 (Federal funds rate), 均为季度频率

- 模型滞后阶数为 4, VAR(4):

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{c} + \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{X}_{t-1} + \cdots + \mathbf{\Phi}_4 \mathbf{X}_{t-4} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

VAR 示例

- 以 Stock and Watson 3 变量 VAR 中的基准利率方程为例

$$\begin{aligned}i_t &= c^i + \phi_1^u u_{t-1} + \phi_1^\pi \pi_{t-1} + \phi_1^i i_{t-1} \\&\quad + \phi_2^u u_{t-2} + \phi_2^\pi \pi_{t-2} + \phi_2^i i_{t-2} \\&\quad \dots \\&\quad + \phi_4^u u_{t-4} + \phi_4^\pi \pi_{t-4} + \phi_4^i i_{t-4} + \varepsilon_t^i\end{aligned}$$

- 上式可以看做 Taylor 规则的一般化

本节内容

1 VAR 模型

2 VAR 平稳性和总体矩

VAR 的平稳性

- 与单变量 AR 模型类似，VAR 模型也有（协方差）平稳性问题
- 给定 VAR 方程，满足该（差分）方程的 VAR 过程 $\mathbf{X}_t$ ，未必是一个平稳过程
 - 考虑 2-元 VAR(1) 模型，滞后项矩阵为

$$\Phi = \begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- 与单变量 AR 模型的特征多项式类似，VAR 模型也可以定义特征多项“式”
——不过是矩阵取值

VAR(1) 的例子

- 考虑 K -元 VAR(1) 模型: $X_t = \Phi X_{t-1} + \varepsilon_t$
- 类似 AR(1) 做递推展开, 可得

$$\begin{aligned} X_t &= \varepsilon_t + \Phi \varepsilon_{t-1} + \Phi^2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \Phi^{J-1} \varepsilon_{t-J+1} + \Phi^J X_{t-J} \\ &= \sum_{j=0}^{J-1} \Phi^j \varepsilon_{t-j} + \Phi^J X_{t-J} \end{aligned}$$

- AR(1) 的 MA 展开中, 平稳性需要 ε_{t-j} 前系数具有绝对可和性质, 这同时保证了 X_{t-J} 项收敛到 0 $\Leftarrow |\phi| < 1$
- 对应到 VAR(1) 中, Φ 需要满足什么性质?

VAR(1) 的例子

- 假设 Φ 具有 K 个互不相等的特征值 $\lambda_k, k = 1, \dots, K$, 则 Φ 可对角化, 即存在可逆矩阵 C 使得 $\Phi = C\Lambda C^{-1}$, 其中 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_K)$
- 定义 $Y_t = C^{-1}X_t, \zeta_t = C^{-1}\varepsilon_t$, 则当 $|\lambda_k| < 1 \forall k$ 时,

$$Y_t = \sum_{j=0}^{J-1} \Lambda^j \zeta_{t-j} + \Lambda^J Y_{t-J} \longrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^j \zeta_{t-j}, \quad J \rightarrow \infty$$

为平稳 (向量) 序列

- 此时有 $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi^j \varepsilon_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} C\Lambda^j C^{-1} \varepsilon_{t-j}$
- 若 Φ 不可对角化, 但 $|\lambda_k| < 1 \forall k$, 可以用 Jordan 分解证明其平稳性

VAR(p) 的平稳性

- 考虑开始的 VAR(p) 模型，并使用滞后算子将模型改写为

$$A(\mathcal{L})X_t \equiv (I_K - \Phi_1\mathcal{L} - \dots - \Phi_p\mathcal{L}^p)X_t = c + \varepsilon_t$$

其中 $A(\mathcal{L})$ 表示算子多项式矩阵，即矩阵中每一个元素都是 $\mathcal{L}$ 的一个多项式； I_K 表示 $K \times K$ 的单位阵

- 是否可以找到一个对应的（无穷阶）算子多项式矩阵 $B(\mathcal{L})$ ，使得 $B(\mathcal{L})A(\mathcal{L}) = I_K$ ？
- 如若此，则有 $X_t = B(\mathcal{L})c + B(\mathcal{L})\varepsilon_t$ ；进一步，如何保证平稳性？

算子多项式矩阵的逆

- 算子多项式矩阵 $A(\mathcal{L}) = [A_{ij}(\mathcal{L})]_{1 \leq i, j \leq K}$
- 为求 $A(\mathcal{L})$ 的逆, 将 $\mathcal{L}$ 看做一个普通变元, 或直接将 $\mathcal{L}$ 替换为复变元 $z \in \mathbb{C}$, 则 $A(\mathcal{L})$ 或 $A(z)$ 就是一个普通矩阵求逆的问题
- Cramer 法则:

$$A^{-1}(\mathcal{L}) = \frac{1}{\det[A(\mathcal{L})]} A^*(\mathcal{L}), \quad A^{-1}(z) = \frac{1}{\det[A(z)]} A^*(z)$$

其中 $A^*(\cdot)$ 为 $A(\cdot)$ 的伴随矩阵

- 注意, $A^*(\cdot)$ 中每个元素, 只是 $\mathcal{L}$ 或 z 的 $p(K-1)$ -阶多项式; 而 $\det[A(\cdot)]$ 则是 $\mathcal{L}$ 或 z 的 pK -阶多项式

伴随矩阵的形式

- 与普通数量矩阵（各元素为一个数）类似，多项式矩阵 $A(z)$ 的伴随矩阵 $A^*(z)$ 第 i 行、第 j 列元素 $A_{ij}^*(z)$ ，为矩阵 $A(z)$ 关于第 j 行、第 i 列元素 $A_{ji}(z)$ 的代数余子式
 - 该代数余子式为 $A(z)$ 删去第 j 行与第 i 列（即 $A_{ji}(z)$ 所在行列）剩下的 $(K-1) \times (K-1)$ 阶矩阵行列式乘以 $(-1)^{i+j}$
- 具体而言，有如下表达式

$$A_{ij}^*(z) = (-1)^{i+j} \det \begin{bmatrix} A_{11}(z) & \cdots & A_{1i-1}(z) & A_{1i+1}(z) & \cdots & A_{1K}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{j-1,1}(z) & \cdots & A_{j-1,i-1}(z) & A_{j-1,i+1}(z) & \cdots & A_{j-1,K}(z) \\ A_{j+1,1}(z) & \cdots & A_{j+1,i-1}(z) & A_{j+1,i+1}(z) & \cdots & A_{j+1,K}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{K1}(z) & \cdots & A_{Ki-1}(z) & A_{Ki+1}(z) & \cdots & A_{KK}(z) \end{bmatrix}$$

平稳性的条件

- 平稳性的重点: $A^{-1}(\mathcal{L})\varepsilon_t$ 的平稳性

$$A^{-1}(\mathcal{L})\varepsilon_t = \frac{1}{\det[A(\mathcal{L})]} \underbrace{A^*(\mathcal{L})\varepsilon_t}_{MA(p(K-1))}$$

分母 $\det[A(\mathcal{L})]$ 为算子 pK -阶多项式

- 令 $\det[A(z)]$ 的 pK 个零点为 $z_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, pK$, 则

$$\det[A(z)] = \left(1 - \frac{z}{z_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{z_{pK}}\right)$$

对应的算子多项式分解为

$$\det[A(\mathcal{L})] = \left(1 - \frac{\mathcal{L}}{z_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{\mathcal{L}}{z_{pK}}\right)$$

平稳性的条件

- 显然, $A^{-1}(\mathcal{L})\varepsilon_t$ 平稳的条件, 为 $|z_i| > 1 \forall i$
 - 即充分, 且必要
- 由 $\det[A(z)] = \det[I_K - \Phi_1 z - \dots - \Phi_p z^p]$, 令 $z = 1/\lambda$, 则

$$\begin{aligned}\det[A(z)] &= \det[I_K - \Phi_1 \lambda^{-1} - \dots - \Phi_p \lambda^{-p}] \\ &= \det[\lambda^{-p}(I_K \lambda^p - \Phi_1 \lambda^{p-1} - \dots - \Phi_p)] \\ &= \lambda^{-pK} \det[I_K \lambda^p - \Phi_1 \lambda^{p-1} - \dots - \Phi_p]\end{aligned}$$

平稳性的条件意味着 $|\lambda_i| = 1/|z_i| < 1$

- 当 $p = 1$ 时, $\det[A(z)] = 0 \Leftrightarrow \det[I_K \lambda - \Phi_1] = 0$, 平稳性等价于 Φ 的特征值 (模长) 小于 1

VAR 的矩

- VAR 满足平稳性条件时, $\det[A(z)] = \det[I_K - \Phi_1 z - \cdots - \Phi_p z^p]$ 在 $\mathbb{C}$ 中单位圆内不等于 0, 特别的 $\det[A(1)] \neq 0$
- 此时 $A(1) = I_K - \Phi_1 - \cdots - \Phi_p$ 为可逆矩阵, 故

$$\mu = \mathbb{E}X_t = A^{-1}(1)c$$

- 当 $p \geq 2$ 时, 计算协方差矩阵 $\text{var}(X_t) = \mathbb{E}(X_t - \mu)(X_t - \mu)^\top$ 需要进一步的线性代数技巧
- 当 $p = 1$ 时, $\text{var}(X_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi^j \Omega \Phi^{\top j}$, 且 Φ^j 常可通过 Φ 的对角化来计算
 - 不过, 所有 $p \geq 2$ 阶 VAR 都可以改写为 1 阶 VAR

$\text{VAR}(p) \Rightarrow \text{VAR}(1)$

- K 维向量的 p -阶 VAR

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{c} + \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{X}_{t-1} + \cdots + \mathbf{\Phi}_p \mathbf{X}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

可以改写为 pK 维的 1-阶 VAR

$$\mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{\Psi} \mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{e}_t$$

- 其中

$$\mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_t \\ \mathbf{X}_{t-1} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{t-p} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_1 & \cdots & \mathbf{\Phi}_{p-1} & \mathbf{\Phi}_p \\ \mathbf{I}_K & \cdots & \mathbf{0}_K & \mathbf{0}_K \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_K & \cdots & \mathbf{I}_K & \mathbf{0}_K \end{bmatrix}, \mathbf{e}_t = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$\text{VAR}(p) \Rightarrow \text{VAR}(1)$: 平稳性

- VAR(1) 过程 $\mathbf{Y}_t$ 的矩阵值算子特征多项式为

$$A(\mathcal{L}) = I_{pK} - \Psi \mathcal{L}$$

- $\mathbf{Y}_t$ 的平稳性条件为 pK 阶多项式 $\det[A(z)] = \det[I_{pK} - \Psi z]$ 零点全部位于 $\mathbb{C}$ 中单位圆之外
- 令 $\lambda = 1/z \Leftrightarrow z = 1/\lambda$, 上述条件为 $\lambda^{pK} \det[\lambda I_{pk} - \Psi]$ 所有零点在单位圆中, 即 Ψ 的特征值模长均小于 1

Ψ 的特征多项式

$$\begin{aligned}
& \det[\lambda I_{pk} - \Psi] \\
&= \det \begin{bmatrix} \lambda I_K - \Phi_1 & -\Phi_2 & \cdots & -\Phi_{p-1} & -\Phi_p \\ -I_K & \lambda I_K & \cdots & \mathbf{0}_K & \mathbf{0}_K \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_K & \mathbf{0}_K & \cdots & -I_K & \lambda I_K \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} \lambda I_K - \Phi_1 & -\Phi_2 & \cdots & -\Phi_{p-1} - \frac{1}{\lambda} \Phi_p & -\Phi_p \\ -I_K & \lambda I_K & \cdots & \mathbf{0}_K & \mathbf{0}_K \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_K & \mathbf{0}_K & \cdots & \mathbf{0}_K & \lambda I_K \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ψ 的特征多项式

$$\begin{aligned}
& \det[\lambda I_{pk} - \Psi] \\
&= \det \begin{bmatrix} \lambda I_K - \Phi_1 & -\Phi_2 - \frac{1}{\lambda} \Phi_3 \cdots - \frac{1}{\lambda^{p-2}} \Phi_p & \cdots & -\Phi_{p-1} - \frac{1}{\lambda} \Phi_p & -\Phi_p \\ -I_K & \lambda I_K & \cdots & \mathbf{0}_K & \mathbf{0}_K \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_K & \mathbf{0}_K & \cdots & \mathbf{0}_K & \lambda I_K \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} \lambda I_K - \Phi_1 - \cdots - \frac{1}{\lambda^{p-1}} \Phi_p & \cdots & \cdots & -\Phi_{p-1} - \frac{1}{\lambda} \Phi_p & -\Phi_p \\ \mathbf{0}_K & \lambda I_K & \cdots & \mathbf{0}_K & \mathbf{0}_K \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_K & \mathbf{0}_K & \cdots & \mathbf{0}_K & \lambda I_K \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ψ 的特征多项式

$$\begin{aligned}
& \det[\lambda \mathbf{I}_{pk} - \Psi] \\
&= \det \left[\lambda \mathbf{I}_K - \Phi_1 - \dots - \frac{1}{\lambda^{p-1}} \Phi_p \right] \cdot \det[\lambda \mathbf{I}_K] \cdots \det[\lambda \mathbf{I}_K] \\
&= \det \left[\lambda \mathbf{I}_K - \Phi_1 - \dots - \frac{1}{\lambda^{p-1}} \Phi_p \right] \lambda^{(p-1)K} \\
&= \det \left[\frac{1}{\lambda^{p-1}} \left(\lambda^p \mathbf{I}_K - \lambda^{p-1} \Phi_1 - \dots - \Phi_p \right) \right] \lambda^{(p-1)K} \\
&= \det[\lambda^p \mathbf{I}_K - \lambda^{p-1} \Phi_1 - \dots - \Phi_p] \lambda^{-(p-1)K} \lambda^{(p-1)K} \\
&= \det[\lambda^p \mathbf{I}_K - \lambda^{p-1} \Phi_1 - \dots - \Phi_p]
\end{aligned}$$

与 VAR(p) 形式的平稳性条件完全一致