

## 2021 秋季本科时间序列

# 第 5 次作业

提交日期：11 月 9 日

- 考虑带均值的平稳 AR(1) 过程  $X_t = \mu + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$ ,  $t = 1, \dots, T$ ,  $\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1)$ ,  $|\phi| < 1$ .
  - 计算随机向量  $\mathbf{Z}_t = [1, X_{t-1}]^T$  的交叉二阶矩矩阵  $\mathbf{M} = \mathbb{E}\mathbf{Z}_t\mathbf{Z}_t^T$ , 并说明该矩阵满秩。
  - 按照第 5 讲内容, 计算 AR(1) 过程的总体 (理论) 谱密度函数一般表达式, 对  $\phi = 0.5, 0.95$ , 计算出具体谱密度函数表达式, 并绘图。提示: 常数项不影响自协方差函数, 进而不影响谱密度函数。
  - 固定  $\mu = 1$ , 考虑  $\phi = 0.5, 0.95$ , 分别记为  $\phi^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ 。给定  $\phi^{(i)}$ , 请在 R 或 Python 中编程, 生成  $X_t^{(i)}$  的随机模拟序列,  $T = 1000$ , 起始值为  $X_0^{(i)} = \mathbb{E}^{(i)}X_t = \mu/(1 - \phi^{(i)})$ 。绘图展示这 3 个模拟序列, 使用 R 的 `spec` 函数 (或 Python 对应函数) 计算 3 个时间序列的样本谱密度函数的估计, 并与上问计算的样本谱密度函数进行对比。提示: `spec` 函数估计样本谱密度的相关参数设定, 也可以参照理论谱密度进行调整优化。
  - 固定 (c) 中 2 个模拟序列不变, 对每个序列  $\{X_t^{(i)}\}$ , 按照每新增 50 个样本, 进行 OLS 估计; 即  $k = 1, \dots, 20$ , 对样本  $\{X_t^{(i)} : t = 1, \dots, 50k\}$  进行 OLS 估计, 估计结果记为  $\hat{\beta}^{(i),k}$ 。对每一个  $i$ , 绘制  $\hat{\beta}^{(i),k}$  关于  $k$  的序列图。注意该向量有两个元素, 应当分开绘图。请讨论随着  $\phi$  的增大, OLS 估计随样本量  $100k$  增加时的收敛性有何变化。
  - 给定 (c) 中  $\phi^{(i)}$  取值,  $i = 1, 2$ , 并定义  $\beta_0^{(i)} = [\mu, \phi^{(i)}]^T$ 。按照每次生成  $T = 100$  个  $\{X_t^{(i)}\}$  模拟样本的方式, 重复生成 500 组样本  $\{X_t^{(i),j}\}$ ,  $j = 1, \dots, 500$ 。对每组样本  $\{X_t^{(i),j}\}$ , 进行 OLS 估计得到系数向量  $\hat{\beta}^{(i),j}$ 。得到 500 个系数估计向量后, 绘制  $\hat{\beta}^{(i),j} - \beta_0^{(i)}$  关于  $j$  的样本直方图。注意每个估计向量有两个系数, 应当分开绘图。对 500 组估计值, 计算这两个系数的样本标准差  $\hat{\sigma}(\hat{\mu}), \hat{\sigma}(\hat{\phi})$ , 并在系数估计值样本直方图中, 分别添加以  $\mu, \phi^{(i)}$  为均值、样本标准差  $\hat{\sigma}(\hat{\mu}), \hat{\sigma}(\hat{\phi})$  为标准差的正态分布密度曲线, 对比样本分布与正态分布间的差异。
  - 请根据课件内容, 对每组参数取值  $i$ , 计算  $T = 100$  期样本 AR(1) 序列系数 OLS 估计值  $\hat{\beta}^{(i)}$  两个元素各自的渐近标准误。注意, 渐近标准误的计算分两种情况: 1. 理论渐近标准误, 基于冲击的真实方差  $\sigma_\varepsilon^2 = 1$  以及解释变量的真实协方差矩阵  $\mathbf{M}$ ; 2. 样本渐近标准误, 基于  $T = 100$  期随机样本 (如  $\mathbf{e}$ , 但只生成一组模拟样本)。请对比这两种渐近标准误的计算结果与 (e) 中所得系数估计值样本标准差的关系。
  - 重复 (e)–(f) 的内容, 但取  $T = 900$ 。比较此时系数估计值理论与样本渐近标准误与 500 组样本所得估计系数样本标准差的关系。此时估计系数的样本标准差是否近似为 (c) 中的 1/3? 样本渐近标准误与 (f) 相比呢?