

2021 秋季本科时间序列

第 2 次作业

提交日期：10 月 19 日

1. $\forall z = a + bi \in \mathbb{C}$, 其复共轭为 $\bar{z} = a - bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$ 为虚根。
 - (a) 请证明 z 的模长 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 满足 $|z|^2 = z\bar{z}$ 。
 - (b) $\forall w = c + di \in \mathbb{C}$, 请证明 $|zw| = |z| \cdot |w|$, 并证明 $|z^k| = |z|^k$, $k = 2, 3, \dots$ 。
 - (c) 若 z 满足 $|z| < 1$, 请证明 $\sum_{i=0}^{\infty} z^i$ 收敛且等于 $\frac{1}{1-z} \in \mathbb{C}$ 。
2. $\forall z = a + bi \in \mathbb{C}$, 均可利用将其表示为极坐标形式 $z = |z|e^{i\theta}$, 其中 $|z|$ 为模长, θ 为幅角。

- (a) 请说明 $\bar{z} = |z|e^{-i\theta}$, 并再次证明 $z\bar{z} = |z|^2$ 。
- (b) 对任意的 $\theta, \phi \in \mathbb{R}$, 请利用 $e^{i(\theta+\phi)} = e^{i\theta}e^{i\phi}$, 证明三角函数的和差化积公式:

$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi, \quad \sin(\theta + \phi) = \cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi.$$

3. 给定方差为 σ_ε^2 的白噪声过程 $\{\varepsilon_t\}$ 以及均方可和序列 $\{\phi_i\}$, 考虑线性过程

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i \varepsilon_{t-i}.$$

- (a) 对于任意的 $a, b \in \mathbb{R}$, 请证明如下最简单的几何平均不等式:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq |ab|.$$

- (b) 利用上述不等式, 证明: $\forall k \in \mathbb{Z}$, X_t 的 k -阶自协方差存在且不随时间变化。