国际金融试验班 2021 年秋 • 时间序列

第 5 讲：平稳时间序列自相关性与谱

授课人：刘　岩

武汉大学经管学院金融系

2021 年 10 月 12 日

本讲内容

本节内容

白噪声

- 白噪声 (white noise) 是最常见的一类平稳时间序列
- $\{\varepsilon_t\}$ 是白噪声，若满足 $\mathbb{E}\varepsilon_t = 0$，$\mathrm{var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 > 0$，以及 $\mathrm{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0, \forall k \geq 0$
- iid 序列是白噪声，反之不成立
- 但大部分时间序列模型中，均假设白噪声——经常又称作新息 (innovation) 或冲击 (shock)——是 iid 序列

自协方差与自相关系数

给定平稳时间序列 $\{X_t\}$

- 平稳时间序列最基本的分析对象：自协方差函数 (autocovariance function, ACF) $\sigma_X^2(k) = \mathrm{cov}(X_t, X_{t-k})$
  - Cauchy-Schwartz 不等式：$[\mathrm{cov}(X,Y)]^2 \leq \mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y)$
  - 自协方差 $\sigma_X^2(k) \leq \sigma_X^2(0) = \mathrm{var}(X_t)$
- 自协方差函数经常也用 $\gamma_X(k)$ 来表示，避免写上标 "2"
- 自相关系数函数 (autocorrelation function, ACF) $\rho_X(k) = \sigma_X^2(k)/\sigma_X^2(0)$
  - 自相关系数反映的是序列的持续性(persistence)：$t-k$ 期取值和 t 期取值的同步特征

偏自相关系数

给定时间序列 $\{X_t\}_{t=1}^T$

- 还可以考虑另一种方法来描述数据的持续性特征，即偏自相关系数 (partial autocorrelation)
- 考虑 X_t 对 X_{t-k}, $k = 1, \ldots, K < T$ 的回归方程

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + \cdots + \beta_K X_{t-K} + e_t$$

- 上述回归方程系数 β_k 的 OLS (ordinary least square) 估计值 $\hat{\beta}_k$ 就称为 X_t 的 k-阶偏自相关系数（估计值）
  - 偏自相关系数与自相关系数之间有紧密联系；以 AR(1) 模型为例，$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t$，$|\rho| < 1$，$\varepsilon_t$ 为白噪声，则其 1-阶自相关系数等于 1-阶偏自相关系数
  - 但一般情况下，并不相等

本节内容

线性时间序列

- 本课程大部分内容考虑线性 (linear) 时间序列
- 给定白噪声序列 $\{\varepsilon_t\}$，时间序列 $\{X_t\}$ 称为关于 $\{\varepsilon_t\}$ 的线性时间序列，若
$$X_t = \sum_{k=0}^{K} \phi_k \varepsilon_{t-k},$$
其中 K 的取值可以是有限值，也可以是无限值
- 当 $K = \infty$ 时，通常要求 $\{\phi_k\}$ 满足绝对和收敛 (absolutely summable)，即 $\sum_{k=0}^{\infty} |\phi_k| < \infty$
- 另一种要求是满足平方和收敛 (square summable)，即 $\sum_{k=0}^{\infty} \phi_k^2 < \infty$

线性时间序列示例

事实上，所有线性时间序列都是平稳序列，具体例子如下

- q-阶移动平均 (moving average) 过程 MA(q)：给定白噪声 $\{\varepsilon_t\}$，$X_t = \sum_{j=0}^{q} \phi_j \varepsilon_{t-j}$，其中 $\{\phi_j\} \in \mathbb{R}$
  - q 称为滞后期 (lag period)；可为无穷，记为 MA(∞)
- 1-阶自回归 (autoregressive) 过程 AR(1)：$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t$，$|\rho| < 1$
  - 可递归的写为 MA(∞) 过程：$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i}$

线性时间序列的平稳性

定理 1

给定任意常数 $\mu \in \mathbb{R}$、绝对可和序列 $\{\phi_j\}_{j=0}^{\infty}$ 以及白噪声过程 $\{\varepsilon_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$，则线性时间序列

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \varepsilon_{t-j}$$

是协方差平稳序列

证明：1-阶矩 $\mathbb{E}X_t \equiv \mu$，故只需分析 2-阶矩的平稳性

线性时间序列的平稳性

对任意 k 计算 $\mathbb{E}(X_t-\mu)(X_{t-k}-\mu)$，由 $\mathbb{E}\varepsilon_t\varepsilon_{t-i}=0, \forall i\geq 1$ 可知

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t-\mu)(X_{t-k}-\mu) &= \mathbb{E}\sum_{j=0}^{\infty}\phi_j\varepsilon_{t-j}\sum_{j=0}^{\infty}\phi_j\varepsilon_{t-k-j} \\ &= \mathbb{E}\sum_{j=0}^{\infty}\phi_j\varepsilon_{t-j}\sum_{j=k}^{\infty}\phi_{j-k}\varepsilon_{t-j} \\ &= \sum_{j=k}^{\infty}\phi_j\phi_{j-k}\sigma_\varepsilon^2\end{aligned}$$

由于 $\sum_{j=k}^{\infty}\phi_j\phi_{j-k}$ 收敛（作业 1），上述计算说明 X_t 的自协方差存在且不随时间变化，故得证 □

Wold 表示定理

定理 2 (Wold)

任意的协方差平稳序列 $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ 都可以表示为如下三部分的和：

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \varepsilon_{t-j} + V_t,$$

其中，

1. μ 为常数，$\{\varepsilon_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ 是白噪声序列
2. $\{\phi_j\}_{j=0}^{\infty}$ 平方和收敛 $\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j^2 < \infty$
3. $\forall t$, $\text{cov}(V_t, \varepsilon_t) = 0$，且 V_t 可由过去信息 $\{X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\}$ 的线性组合完全决定

Wold 表示定理

- V_t 的例子：参考上讲第 11 页 $V_t = \cos(\pi t + U)$ 并假设 U 与 $\{\varepsilon_t\}$ 无关
  - 定理中 $\{\varepsilon_t\}$、$\{\phi_j\}$ 及 $\{V_t\}$ 都可以从观测序列 $\{X_t\}$ 构造得到
- Wold 表示定理意味着任意的（协方差）平稳过程，差不多就是一个（系数平方可和）线性过程
- 反过来，任意（系数绝对可和）线性过程，也是平稳过程
  - 思考：若系数序列是平方可和，线性过程是否是协方差平稳过程？

本节内容

滞后算子

- 为了简化记法、方便运算，定义滞后算子 (lag operator) $\mathscr{L}$，其作用是将 t 期变量变换为 $t-1$ 期变量：

$$\mathscr{L} : X_t \mapsto X_{t-1}$$

记做 $\mathscr{L}X_t = X_{t-1}$

- 进一步定义之后算子的 "乘法" 或是 "复合"：

$$\underbrace{\mathscr{L} \circ \cdots \circ \mathscr{L}}_{k\text{ 次}} \equiv \mathscr{L}^k : X_t \mapsto X_{t-k}$$

记做 $\mathscr{L}^k X_t = X_{t-k}$

算子多项式

- 滞后算子可以当做变元 x，写为多项式形式，如 $\mathscr{L}+\rho\mathscr{L}^2$，其作用就是把 X_t 变做 $(\mathscr{L}+\rho\mathscr{L}^2)X_t = X_{t-1}+\rho X_{t-2}$
- 如此，可将一般的线性时间序列表达式写为滞后算子多项式表达的形式：令
$$A(\mathscr{L}) = \sum_{k=0}^{K} \phi_k \mathscr{L}^k,$$
则再前页 X_t 可写为 $X_t = A(\mathscr{L})\varepsilon_t$
- 类似的，可将 AR(1) 写为 $X_t - \rho X_{t-1} = (1-\rho\mathscr{L})X_t = \varepsilon_t$
  - 形式上还可以进一步写为 $X_t = \frac{1}{1-\rho\mathscr{L}}\varepsilon_t$，再利用 $\frac{1}{1-\rho\mathscr{L}} = \sum_{i=0}^{\infty}\rho^i\mathscr{L}^i$，则得到 MA($\infty$) 表达

本节内容

谱函数：定义

- 经济或金融时间序列样本 $\{X_t\}_{t=1}^{T}$ 通常会表现出肉眼可见的“周期性”
- 具体刻画这种“周期性”，需要引入谱 (spectrum) 的概念
- 给定平稳时间序列 $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ 及其自协方差函数 $\gamma(k)$，$k \in \mathbb{Z}$，对 $\omega \in \mathbb{R}$，定义

$$s_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) e^{-\mathrm{i}\omega k},$$

  i 为虚根，称 $s_X(\omega)$ 为 $\{X_t\}$ 的谱（密度）函数 (spectrum density function)
- 谱是数学中的一个通用概念，用于刻画数学对象的本质特征
  - 矩阵特征值又称为矩阵的谱；随机变量的特征函数也是一种谱函数

谱函数：条件与性质

- 谱函数定义中，对 $\{\gamma(k)\}$ 序列的收敛性有一定要求
  - 至少要求平方和收敛 $\sum_k \gamma^2(k) < \infty$
  - 若绝对和收敛 $\sum_k |\gamma(k)| < \infty$，则谱函数 $s_X(\omega)$ 具有好的性质
- 若 $s_X(\omega)$ 是 $\{X_t\}$ 的谱函数，则对应的自协方差函数满足下述求逆公式：

$$\gamma(k) = \int_{-\pi}^{\pi} s_X(\omega) e^{\mathrm{i}\omega k} \mathrm{d}\omega$$

- 由 DeMoivre 公式 $e^{-\mathrm{i}\omega k} = \cos(\omega k) - \mathrm{i}\sin(\omega k)$ 可得

$$\begin{aligned} s_X(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k)[\cos(\omega k) - \mathrm{i}\sin(\omega k)] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\gamma(0) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k)\cos(\omega k)\right] \end{aligned}$$

谱函数的直观讨论

- 三角函数 $\cos(\omega t), \sin(\omega t)$ 反映了频率为 ω 的周期波动
  - 相应的周期为 $2\pi/\omega$
- 给定随机变量 $\alpha(\omega)$ 与 $\beta(\omega)$，定义

$$X_t^{\omega} = \alpha(\omega)\cos(\omega t) + \beta(\omega)\sin(\omega t),$$

  则 X_t^{ω} 自然具有波动频率 ω
- 假设时间序列变量 X_t 可以分解为一系列（无穷小）频率区间上 X_t^{ω} 的和

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} X_t^{\omega} \mathrm{d}\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(\omega)\cos(\omega t)\mathrm{d}\omega + \int_{-\pi}^{\pi} \beta(\omega)\sin(\omega t)\mathrm{d}\omega,$$

  则 X_t^{ω} 可看做 X_t 的周期波动中频率为 ω 的成分

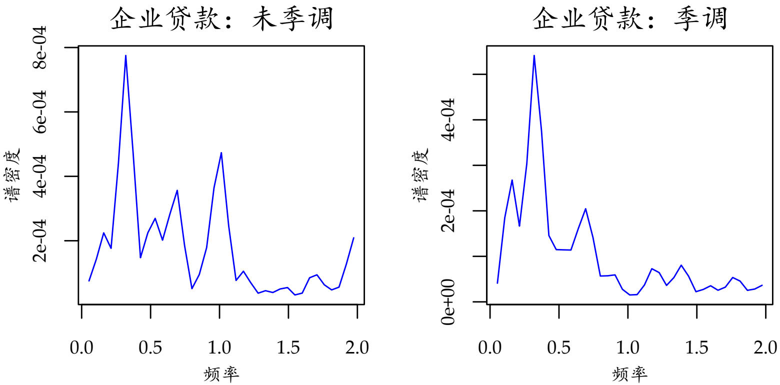
谱函数：非参数估计

- 由上页表达式可知，谱函数的一个直观样本估计为

$$\hat{s}_X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[\hat{\gamma}(0) + 2\sum_{k=1}^{K}\hat{\gamma}(k)\cos(\omega k)\right]$$

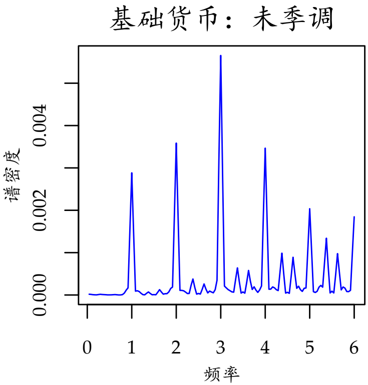
  其中 $K < \infty$ 为某一个有限截断期限，$\hat{\gamma}(k)$ 为样本估计
- 统计软件中，$\hat{s}_X(\omega)$ 的默认估计方式更加精细：给定 T 个样本及 $\omega_j \equiv j/T$，$j = 1, \ldots, T$，通常是选定 $m \in \mathbb{N}$，并在一个小区间 $\mathcal{B}_j = \{\omega : \omega_j - m/T \leq \omega \leq \omega_j + m/T\}$ 上取平均计算 $\hat{s}_X(\omega), \omega \in \mathcal{B}_j$
  - 每个 $\mathcal{B}_j$ 有 $L = 2m + 1$ 个离散格点 $\omega_j + k/T$，$k = -m, \ldots, m$
  - R 中使用 `spec.pgram` 函数估计样本谱函数时，`span` 选项取值对应了 L；另一个常用参数 `taper` 控制了临近频率点位谱估计值相互间的干扰，通常去默认值 0.1 即可

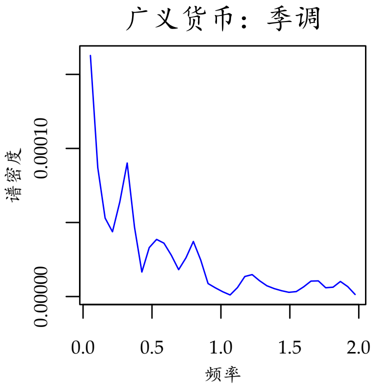
谱密度估计：企业贷款环比增速



- 横坐标取值上限为 2，对应数据自然频率（季度）4 除 2
- 未季调谱密度 $\omega = 1$ 处的尖峰意味着每 $4/1 = 4$ 个季度有一个周期，即年度周期

谱密度估计：货币供应量环比增速





- 基础货币（左）为月度数据，广义货币（右）为季度数据
- M0 谱密度 $\omega = 1$ 处的尖峰意味着每 $12/1 = 12$ 个月度有一个周期，即年度周期；$\omega = 3$ 出的尖峰意味着季度周期

时间序列的线性滤波

- 最常用的时间序列滤波方法为线性滤波 (linear filter)
- 线性滤波的一般形式

$$X_t^f = \sum_{j=-q}^{r} c_j X_{t-j} \equiv C(\mathscr{L}) X_t$$

其中 $C(\mathscr{L})$ 为滤波算子

  - 注意滤波算子中既可以包括 X_t 的滞后项 $j = 1, \ldots, r$，也可以包括超前项 $j = -1, \ldots, -q$
  - 线性滤波的滞后、超前期限 q, r 均可为无穷

- 滤波所得结果 X_t^f 既可以是 X_t 的趋势项，也可以是周期项，取决于滤波算子性质

滤波的谱表示：X_t^f 的自协方差

- 为简便，假设 X_t 期望为 0
- 趋势项 X_t^f 的自协方差 $\gamma_f(k) = \mathbb{E} X_t^f X_{t-k}^f$ 为

$$
\begin{aligned}
\gamma_f(k) &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=-q}^{r} c_j X_{t-j}\right)\left(\sum_{\ell=-q}^{r} c_\ell X_{t-k-\ell}\right) \\
&= \mathbb{E}\sum_{j=-q}^{r}\sum_{\ell=-q}^{r} c_j c_\ell X_{t-j} X_{t-k-\ell} \\
&= \sum_{j=-q}^{r}\sum_{\ell=-q}^{r} c_j c_\ell \gamma(k+\ell-j)
\end{aligned}
$$

滤波的谱表示：X_t^f 的谱函数

- 由谱函数定义得：

$$
\begin{aligned}
s_{X^f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_f(k)e^{-\mathrm{i}\omega k} \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=-q}^{r}\sum_{\ell=-q}^{r}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_j c_\ell \gamma(k+\ell-j)e^{-\mathrm{i}\omega k}
\end{aligned}
$$

- 令 $h=k+\ell-j$，则 $e^{-\mathrm{i}\omega k}=e^{-\mathrm{i}\omega(h+j-\ell)}=e^{-\mathrm{i}\omega h}e^{-\mathrm{i}\omega j}e^{\mathrm{i}\omega\ell}$，故

$$
\begin{aligned}
s_{X^f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=-q}^{r}\sum_{\ell=-q}^{r}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_j c_\ell \gamma(k+\ell-j)e^{-\mathrm{i}\omega h}e^{-\mathrm{i}\omega j}e^{\mathrm{i}\omega\ell} \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=-q}^{r}c_j e^{-\mathrm{i}\omega j}\sum_{\ell=-q}^{r}c_\ell e^{\mathrm{i}\omega\ell}\sum_{h=-\infty}^{\infty}\gamma(h)e^{-\mathrm{i}\omega h} \\
&= C(e^{-\mathrm{i}\omega})C(e^{\mathrm{i}\omega})s_X(\omega)
\end{aligned}
$$

滤波的谱表示：增益函数

- 给定滤波多项式 $C(z)=\sum_{j=-q}^{r} c_j z^j$，$z\in\mathbb{C}$，定义增益 (gain) 函数为

$$G(\omega)=|C(e^{-\mathrm{i}\omega})|=\sqrt{C(e^{-\mathrm{i}\omega})\overline{C(e^{-\mathrm{i}\omega})}}=\sqrt{C(e^{-\mathrm{i}\omega})C(e^{\mathrm{i}\omega})}$$

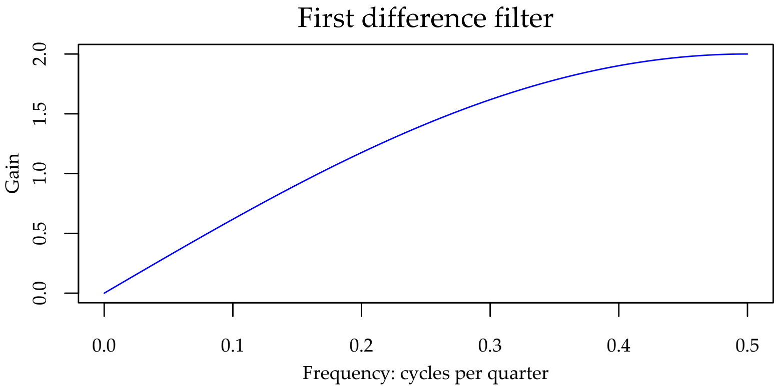
  其中 $\overline{C(e^{-\mathrm{i}\omega})}$ 表示 $C(e^{-\mathrm{i}\omega})$ 的复共轭

- 滤波序列的谱函数可写为

$$s_{X^f}(\omega)=G^2(\omega)s_X(\omega)$$

  即 X_t 不同频率 ω 处周期性的强弱通过 $G(\omega)$ 放大或者缩小，转移到 X_t^f 中

1 阶差分滤波



- 1 阶差分滤波算子为 $1-\mathscr{L}$，滤波多项式为 $1-z$
- 增益函数为 $G(\omega)=\sqrt{2}\sqrt{1-\cos(\omega)}$

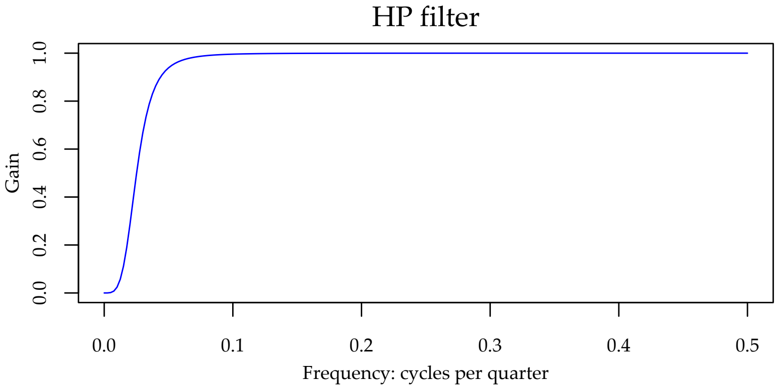
HP 滤波

- 给定样本序列 $\{X_t\}_{t=1}^T$，HP 滤波 (HP filter) 通过求解最小化问题获得趋势项 $\{\tilde{X}_t\}$：

$$\{\tilde{X}_t\} = \operatorname{argmin}\left\{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \tilde{X}_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1}(\tilde{X}_{t+1} - 2\tilde{X}_t + \tilde{X}_{t-1})\right\}$$

其中 $X_t - \tilde{X}_t$ 即为滤波所得周期项

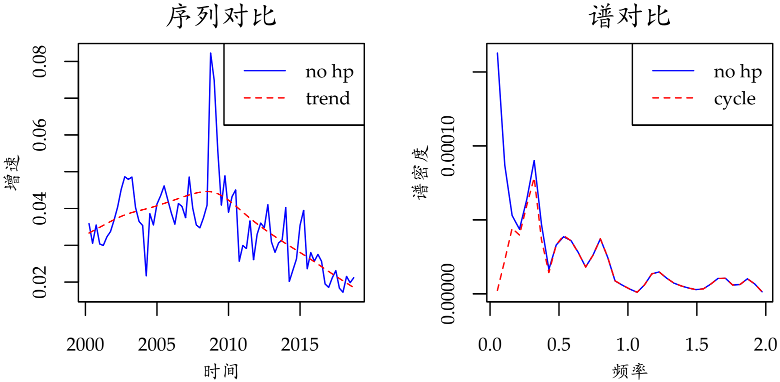
HP 滤波：增益函数



- 增益函数为

$$G(\omega) = \frac{4(1-\cos(\omega))^2}{\frac{1}{\lambda} + 4(1-\cos(\omega))^2}$$

HP 滤波示例：M2 增速



- HP 滤波有效去除了原始增速序列中低频、长周期（趋势）部分