

国际金融试验班 2021 年秋 · 时间序列

# 第 14 讲：随机趋势、单位根与 协整模型

授课人：刘 岩

武汉大学经管学院金融系

2021 年 12 月 14 日

# 本讲内容

- ① 趋势建模
- ② 单位根模型
- ③ 协整模型

## 本节内容

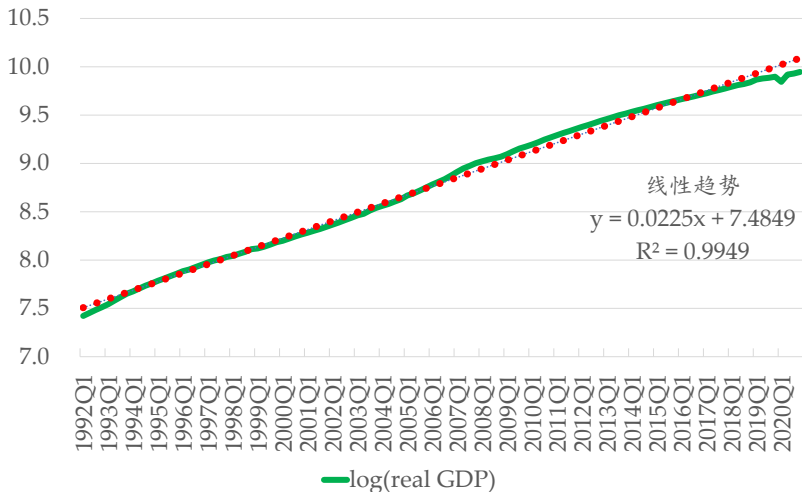
- 1 趋势建模
- 2 单位根模型
- 3 协整模型

## 时间序列的趋势

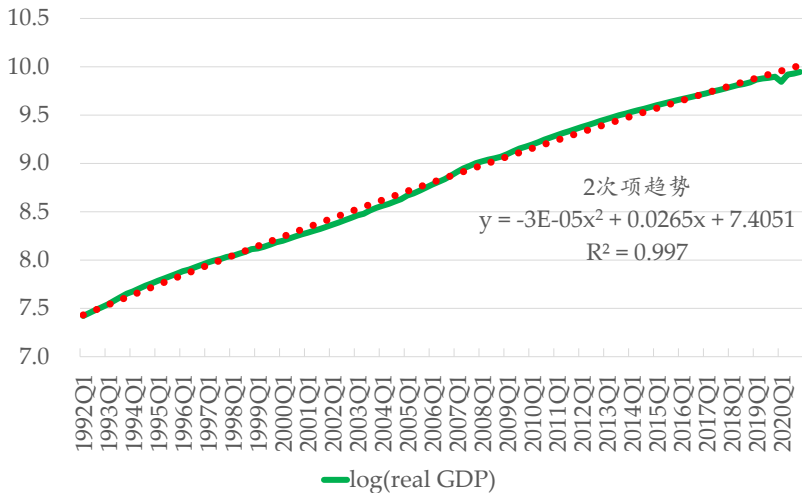
- 时间序列样本  $\{X_t\}_{t=1}^T$ , 可能包含趋势  $X_t = X_t^{\text{trend}} + X_t^{\text{cycle}}$
- 确定性趋势:  $X_t^{\text{trend}}$  是时间  $t$  的确定函数  $f(t)$ 
  - 线性趋势:  $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t$
  - 高阶多项式趋势:  $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_k t^k$
  - 指数趋势:  $f(t) = \exp(\alpha_0 + \alpha_1 t)$
  - 对数趋势:  $f(t) = \log(\alpha_0 + \alpha_1 t)$
- 随机趋势 (stochastic trend):  $X_t$  的 1 阶或高阶差分为平稳过程, 如  $\Delta X_t = (1 - \mathcal{L})X_t = X_t - X_{t-1}$  平稳
  - 最常用差分平稳模型为 ARIMA( $p, i, q$ ) 模型:  

$$\Delta^i X_t = (1 - \mathcal{L})^i X_t \equiv \underbrace{\Delta \circ \dots \circ \Delta}_{i \text{次}} X_t$$
 为一个 ARMA( $p, q$ ) 过程

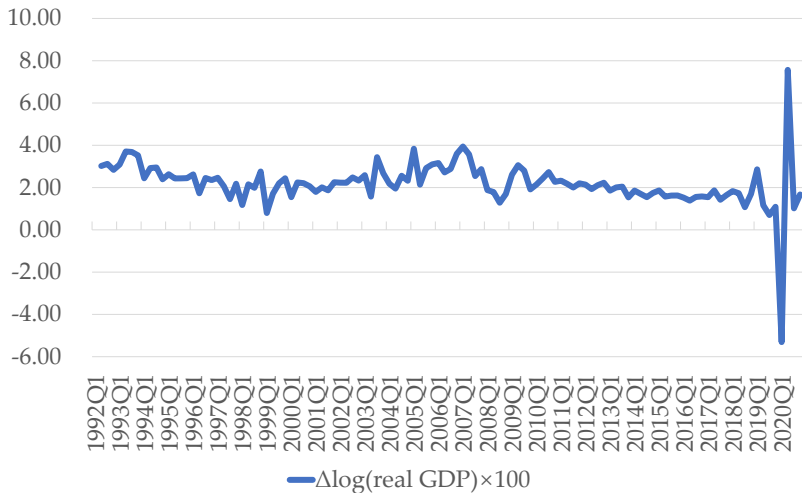
## 中国季度实际 GDP 对数：线性趋势



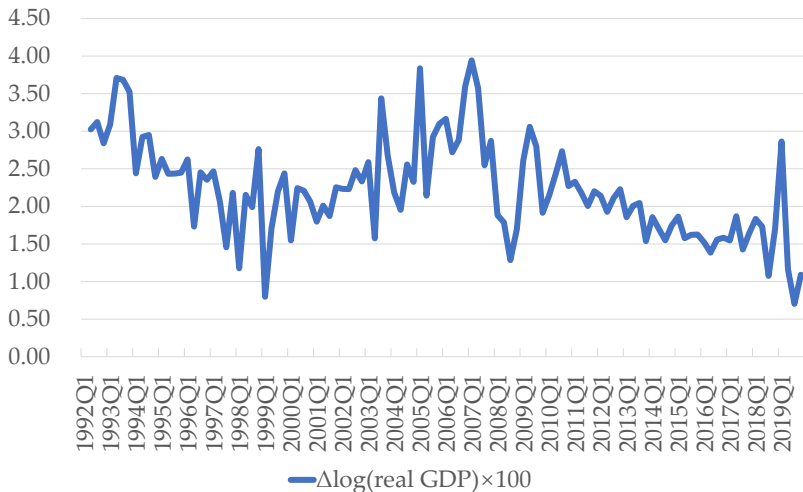
## 中国季度实际 GDP 对数：2 次趋势



## 中国季度实际 GDP 对数差分（环比增速）：1992Q2-2020Q4



## 中国季度实际 GDP 对数差分（环比增速）：1992Q2–2019Q4





## 本节内容

- 1 趋势建模
- 2 单位根模型
- 3 协整模型

## 最简单的随机趋势模型：单位根过程

- 给定时间序列  $\{X_t\}$ ，若  $X_t$  不平稳而  $\Delta X_t$  为一个平稳过程，则称  $\{X_t\}$  为 单位根过程 (unit root process)
- 记  $\alpha_0 + u_t = \Delta X_t$  为单位根过程  $\{X_t\}$  差分后的平稳序列，其中  $\alpha_0$  为常数， $\mathbb{E}u_t = 0$ ，则  $X_t$  可表示为

$$X_t = \alpha_0 + X_{t-1} + u_t$$

其中  $\alpha_0$  为常数，称为 漂移项 (drift)

- 上式的特征多项式为  $A(\mathcal{L}) = 1 - \mathcal{L}$ ，零点为 1，故相应得名单位根 unit root

## 单位根过程的特例：随机游走过程

- 若单位根过程  $\{X_t\}$  差分得到一个白噪声过程  $\{\varepsilon_t\}$ ，则称其为随机游走 (random walk) 过程，此时有

$$X_t = \alpha_0 + X_{t-1} + \varepsilon_t$$

- 若  $\varepsilon_t$  为 iid 序列，若  $\alpha_0 = 0$ ，条件期望满足如下性质：

$$\mathbb{E}_t X_{t+1} \equiv \mathbb{E}[X_{t+1} | \Omega_t] = \mathbb{E}[X_{t+1} | X_t, X_{t-1}, \dots] = X_t$$

- 满足  $\mathbb{E}_t X_{t+1} = X_t$  的随机过程又称为鞅 (martingale)
- 若  $\{X_t\}$  为鞅，则

$$\mathbb{E}_{t-1} \Delta X_t = \mathbb{E}[X_t - X_{t-1} | \Omega_{t-1}] = X_{t-1} - X_{t-1} = 0, \text{ 故得鞅差序列的这一名称}$$

- 有效市场假说 (Efficient Market Hypothesis) 中的弱及半强有效市场特征，即可以表示为证券价格  $P_t$  或收益率  $r_t$  序列是一个鞅过程

## 单位根过程的趋势

- 给定随机游走序列  $Z_t = \beta_0 + Z_{t-1} + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t$  为 iid 白噪声序列, 则

$$Z_t = Z_0 + \beta_0 t + \underbrace{\varepsilon_t + \cdots + \varepsilon_1}_{\text{随机趋势}}$$

- $\mathbb{E}_t[Z_{t+s}] = \mathbb{E}_t[Z_0 + \beta_0(t+s) + \varepsilon_{t+s} + \cdots + \varepsilon_t + \cdots + \varepsilon_1] = Z_0 + \beta_0(t+s) + \varepsilon_t + \cdots + \varepsilon_1$ , 故  $\varepsilon_j, j = 1, \dots, t$  对未来  $Z_{t+s}$  的影响永远存在, 不会衰减
- 单位根过程允许存在 1 阶线性时间趋势: 定义

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + Z_t$$

则  $\Delta X_t = \alpha_1 + \Delta Z_t = \alpha_1 + \beta_0 + \varepsilon_t$  为平稳序列

更一般的随机趋势模型： $d$ -阶单整模型

- 给定时间序列  $\{X_t\}$ ，若有正整数  $d$  使得  $\Delta^d X_t$  平稳而  $\Delta^{d-1} X_t$  不平稳，则称  $\{X_t\}$  为  $d$ -阶单整过程 (integrated process)，记做  $I(d)$  过程
  - ARIMA( $p, i, q$ ) 过程即为  $I(i)$  过程
- 单位根过程是一类特殊的 1-阶单整过程  $I(1)$ ：当且仅当 1-阶差分后为平稳过程
  - 可以证明 Beveridge-Nelson 分解：任何一个  $I(1)$  过程  $X_t$  可分解为  $X_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + Z_t + u_t$ ，其中  $Z_t$  为随机游走过程， $u_t$  为平稳过程
- $I(d)$  过程  $\{X_t\}$  可以刻画  $d$ -阶时间趋势
  - 定义  $X_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_d t^d + Z_t$ ，其中  $Z_t$  满足  $\Delta^d Z_t = \varepsilon_t$  为 iid 白噪声，则  $X_t$  是  $I(d)$  过程

## 检验单位根：以无漂移的随机游走过程为例

- 考虑 AR(1) 模型  $X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t$  为 iid 白噪声, 且原假设  $H_0$  下有  $\rho = 1$ , 即  $H_0$  下  $X_t$  为无漂移的随机游走过程
- 给定样本  $\{X_t\}_{t=0}^T$ ,  $\rho$  的 OLS 估计满足

$$\hat{\rho} - 1 = \frac{\sum_{t=1}^T X_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^T X_{t-1}^2} - 1 = \frac{\sum_{t=1}^T \Delta X_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^T X_{t-1}^2}$$

- 两端乘以  $T$  可得

$$T(\hat{\rho} - 1) = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Delta X_t X_{t-1}}{\frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T X_{t-1}^2} \quad (1)$$

## 检验单位根：以无漂移的随机游走过程为例

- 由于  $X_t$  不平稳，因此对 (1) 式的分子、分母无法使用大数定律来确定  $T \rightarrow \infty$  时的极限
- 假设  $X_0 = 0$ ， $H_0$  下， $X_t = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_t$ ，故  $\mathbb{E}X_t^2 = t\sigma_\varepsilon^2$ ，由此知 (1) 式的分母  $\sum_{t=1}^T X_{t-1}^2$  是  $T^2$  阶大小，由此可猜想  $T \rightarrow \infty$  时  $\frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T X_{t-1}^2$  极限收敛到一个随机变量
- 借助比较深入的概率论工具，可以证明，(1) 式分子、分母分别收敛到如下两个随机变量

$$\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2} B(1)^2 - \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}, \quad \sigma_\varepsilon^2 \int_0^1 B(s)^2 ds$$

其中  $B(s)$  为标准 Brown 运动，即连续时间下的随机过程， $s \in [0, 1]$ ，满足  $B(0) = 0$

## DF 单位根检验：无漂移的随机游走过程

- 上述结果说明，无漂移的随机游走原假设下，

$$T(\hat{\rho} - 1) \xrightarrow{d} \frac{\frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{2} B(1)^2 - \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{2}}{\sigma_{\varepsilon}^2 \int_0^1 B(s)^2 ds} = \frac{\frac{1}{2}(B(1)^2 - 1)}{\int_0^1 B(s)^2 ds} \equiv DF_{\rho}$$

- 该检验统计量最早由 Dickey 与 Fuller 各自在 1976 年提出，故称为 DF  $\rho$ -统计量；相应的检验称为 DF 检验
  - 同时有与  $\rho$ -统计量等价的  $t$ -统计量： $DF_t \equiv \frac{\frac{1}{2}(B(1)^2 - 1)}{\sqrt{\int_0^1 B(s)^2 ds}}$
- DF 统计量的分布函数没有显性表达，但很容易通过随机模拟进行计算



## DF 单位根检验：含有常数项与时间趋势的情形

- 考虑一般的设定  $X_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + Z_t$ ，其中  $Z_t = \rho Z_{t-1} + \varepsilon_t$ ， $\varepsilon_t$  为 iid 白噪声过程
- 原假设  $H_0$  下  $Z_t$  为无漂移的随机游走在过程  $Z_t = Z_{t-1} + \varepsilon_t$ ，即  $\rho = 1$ ，此时  $X_t$  是一个含常数项与时间趋势的单位根过程
- 为检验原假设  $H_0 : \rho = 1$ ，将  $X_{t-1}$  的表示式两端乘以  $\rho$  并从  $X_t$  表达式两端减去，可以得到

$$X_t = \alpha_0^* + \alpha_1^* t + \rho X_{t-1} + \varepsilon_t$$

其中  $\alpha_0^* = (1 - \rho)\alpha_0 + \rho\alpha_1$ ， $\alpha_1^* = (1 - \rho)\alpha_1$

- 对上式进行 OLS 估计，可类似得到 DF 统计量  $T(\hat{\rho} - 1)$ ，其极限分布同样涉及 Brown 运动

## DF 单位根检验的局限与 ADF 检验

- DF 单位根检验中，单位根过程  $X_t$  的差分项  $\Delta X_t$  在原假设下为一个白噪声（可能含有截距项），因此 DF 检验仅能处理简单的随机游走类型 I(1) 过程
- 但数据中经常出现的情况是  $\Delta X_t$  具有序列相关性，此时简单的 DF 检验无法使用
- ADF (augmented Dickey-Fuller) 检验：原假设下  $X_t$  为 I(1) 过程，且  $\Delta X_t$  为 AR( $p$ ) 过程，此时对  $X_t$  的单位根检验称为 ADF 检验
  - 例如  $\Delta X_t$  满足  $\Delta X_t = \zeta_1 \Delta X_{t-1} + \dots + \zeta_p \Delta X_{t-p} + \varepsilon_t$ ，具有自相关结构，此时  $X_t$  为一个 ARIMA( $p, 1, 0$ ) 过程

## ADF 检验：一般情况

- ADF 检验的最一般情况同时考虑常数项与时间趋势：

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \rho X_{t-1} + \zeta_1 \Delta X_{t-1} + \cdots + \zeta_p \Delta X_{t-p} + \varepsilon_t$$

- 利用上式的 OLS 估计，可以构造如下的 ADF 检验统计量

$$\frac{T(\hat{\rho} - 1)}{1 - \hat{\zeta}_1 - \cdots - \hat{\zeta}_p}$$

其极限分布同样涉及 Brown 运动

- 与 DF 检验一致，ADF 也有不含常数项或时间趋势的版本；是否选择包括常数项或时间趋势的设定，应参考（经济）理论依据

## 本节内容

- 1 趋势建模
- 2 单位根模型
- 3 协整模型

## 多维单位根过程

- 经济或者金融中，经常需要将多个单位根序列放在一块进行分析
  - 对数 GDP、对数 M2 序列同时建模分析，货币数量论的基础
  - 多类大宗商品价格，以及相应的期货价格
  - 股票价格与市场指数，或其他定价因子指数序列
- 与单变量类似，称  $n \times 1$  维向量  $X_t$  为  $n$ -维单位根过程，若  $X_t$  不是向量平稳过程，但  $\Delta X_t$  是向量平稳过程
  - $X_t$  中至少有一个分量不是平稳过程
  - $\Delta X_t$  表示对每一个分量求差分

## 协整模型

- 将两个或多个单位根变量放在一块考察时，通常有理论依据，认为这些单位根变量之间存在**稳定关联**
- 简化假设：单位根变量间的稳定关联，可以表示为这组单位根变量间一个特定线性组合，产生一个平稳变量
  - 例如股票指数  $M_t$  与指数 ETF (exchange traded fund) 价格  $P_t$  间，若无套利条件成立，则应满足近似比例关系  $P_t = \gamma_t M_t$ ，其中  $\gamma_t$  表示流动性冲击等因素引起的短期价格偏离，为平稳过程；相应的对数形式为  $\log P_t = \log \gamma_t + \log M_t$ ，故  $\log P_t - \log M_t = \log \gamma_t$  平稳，但  $\log P_t, \log M_t$  各自包含单位根
- 此时称这些单位根变量为协整 (cointegrated) 变量，相应的多维单位根过程为协整过程

## 协整向量与矩阵

- 假设  $n$ -维单位根过程  $X_t$  中总共有  $h \leq n$  组协整关系，其中每组关系对应的系数（列）向量为  $a_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, h$ ，即  $a_i^\top X_t$  平稳；将这组向量列为矩阵  $A = [a_1, \dots, a_h]$ ，称为协整矩阵
- 定义  $h \times 1$  向量  $Z_t = A^\top X_t$  为误差 (error) 向量，即各单位根变量间发生的短期暂时性偏离

## 向量误差修正模型

- Granger 证明了如下结果：若  $X_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + W_t$  中的向量单位根过程  $W_t$  满足 VAR( $p$ ) 方程，白噪声过程为  $\varepsilon_t$ ，则存在  $n \times h$  矩阵  $B$  使得  $X_t$  可表示为如下形式：

$$\Delta X_t = \alpha_0^* + \alpha_1^* t - BZ_t + \zeta_1 \Delta X_{t-1} + \cdots + \zeta_{p-1} \Delta X_{t-p+1} + \varepsilon_t$$

称为向量误差修正模型 (vector error-correction model, VECM)

- VECM 形式意味着协整变量间的短期偏离（误差）在向量动态中，会自动得到纠正，以保证协整变量间恢复到长期稳定关系中
- 这一长期稳定关系具有变量间长期均衡的涵义