

2020 秋季本科时间序列

第 4 次作业

提交日期：11 月 5 日

1. 考虑 AR(2) 过程 $X_t = 2\phi X_{t-1} - \phi^2 X_{t-2} + \varepsilon_t$, $\{\varepsilon_t\}$ 为方差等于 σ_ε^2 的白噪声, $\phi \in \mathbb{R}$ 且 $|\phi| < 1$ 。

- (a) 说明 X_t 为平稳过程。
- (b) 计算 $\sigma_X^2(k)$ 的表达式, $k = 0, 1, 2$ 。
- (c) 定义系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2\phi & -\phi^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

计算 A 的特征值 λ 及 A 的 Jordan 分解

$$A = C \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} C^{-1},$$

其中需要将 C 写为 ϕ 的表达式。

(d) 请计算 A^k 表达式, $k \in \mathbb{N}$, 进而求出 $\sigma_X^2(k)$ 的通项表达式。

2. 考虑 K -元线性回归模型

$$Y_t = \mathbf{X}_t^\top \boldsymbol{\beta} + e_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

其中 \mathbf{X}_t 为 $K \times 1$ 向量, 对应的矩阵形式为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}.$$

(a) 对任意的 $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^K$, 定义残差平方和函数

$$f(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{e}^\top \mathbf{e} = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^\top (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}).$$

请计算 $f(\boldsymbol{\beta})$ 的 Jacobian 向量 $\partial f / \partial \boldsymbol{\beta} = \left[\frac{\partial f}{\partial \beta_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \beta_K} \right]^\top$, 并说明 $\partial f / \partial \boldsymbol{\beta} = 2\mathbf{X}^\top (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$.

(b) 继续计算 $f(\boldsymbol{\beta})$ 的 Hessian 矩阵

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \beta_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial \beta_1 \partial \beta_K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \beta_K \partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial \beta_K^2} \end{bmatrix},$$

并说明对任意的 \mathbf{X} , $H(f)$ 为半正定矩阵。

(c) 请说明 $H(f)$ 为正定矩阵的条件。