

2020 秋季本科时间序列

第 3 次作业

提交日期：10 月 29 日

1. $\forall z = a + bi \in \mathbf{C}$, 其复共轭为 $\bar{z} = a - bi$, $a, b \in \mathbf{R}$, $i = \sqrt{-1}$ 为虚根。
 - (a) 请证明 z 的模长 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 满足 $|z|^2 = z\bar{z}$ 。
 - (b) $\forall w = c + di \in \mathbf{C}$, 请证明 $|zw| = |z| \cdot |w|$, 并证明 $|z^k| = |z|^k$, $k = 2, 3, \dots$ 。
 - (c) 若 z 满足 $|z| < 1$, 请证明 $\sum_{i=0}^{\infty} z^i$ 收敛且等于 $\frac{1}{1-z} \in \mathbf{C}$ 。
2. 若 $\{Y_t\}$ 为平稳过程, 期望为 μ_Y , 自协方差为 $\sigma_Y^2(k)$, $k \in \mathbf{N}$ 。若 $(1 - \rho\mathcal{L})X_t = Y_t$, $\rho \in \mathbf{C}$ 且 $|\rho| < 1$, 请计算 μ_X 与 $\sigma_X^2(k)$ 的表达式, 并说明 X_t 为平稳序列。
3. 考虑 AR(2) 方程 $X_t = 1.5X_{t-1} - 0.56X_{t-2} + \varepsilon_t$, $\{\varepsilon_t\}$ 为白噪声。
 - (a) 请证明上述 AR(2) 方程定义的 $\{X_t\}$ 为平稳过程。
 - (b) 请计算 X_t 的 Wold 表示 $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \varepsilon_{t-i}$ 中前三项系数 θ_i , $i = 1, 2, 3$ 。
 - (c) 请计算 X_t 的自协方差 $\sigma_X^2(k)$, $k = 0, 1, 2$ 。
 - (d) 【附加题, 百分制加 5 分】计算 X_t Wold 表示中系数 θ_i 的通项公式, $i \in \mathbf{N}$ 。