

2020 秋季本科时间序列

## 第 2 次作业

提交日期：10 月 22 日

1. 考虑课件 5 第 5 页示例（略微修正） $X_t = \cos(\pi t + U)$ ，其中  $U \sim \mathcal{U}([-\pi, \pi])$ ， $t \in \mathbb{Z}$ 。
  - (a) 请计算  $\sigma_X^2(k)$ ， $k \in \mathbb{N}$ 。
  - (b) 请使用 R 或者 Python 编程，按照题中分布随机生成一个  $U$ ，并生成  $t = 1, \dots, 1000$  的样本值  $\{X_t\}_{t=1}^{1000}$ 。使用 ts 宏包的 ACF 函数，计算  $\{X_t\}$  的样本自协方差函数，并与理论值进行对比。
2. 给定 iid 样本  $\{X_i\}_{i=1}^N$ ，期望为  $\mathbb{E}X_i = \mu$ ，方差为  $\text{var}(X_i) = \sigma^2$ ，请说明样本方差

$$\hat{\sigma}_N^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \hat{\mu}_N)^2$$

的期望  $\mathbb{E}\hat{\sigma}_N^2 = \sigma$ ，其中  $\hat{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$  为样本均值。提示：可以先将上述求和项按照  $(X_i - \mu + \mu - \hat{\mu}_N)^2$  进行拆分，并分别求期望。

3. 考虑 AR(1) 过程  $X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t$ ， $|\rho| < 1$ ，其中  $\varepsilon_t$  为 iid 标准正态分布白噪声序列。
  - (a) 给定  $X_0 = a \in \mathbb{R}$  为任意实数，请确定  $X_t$  的分布函数  $F_t(x)$ ， $t \geq 1$ 。
  - (b) 求出上述分布函数  $F_t(x)$  当  $t \rightarrow \infty$  时的极限分布  $F_\infty(x)$ ，并验证  $F_\infty(x)$  为上述 AR(1) 过程的平稳分布。
  - (c) 固定  $\rho = 0.8$ 。用 R 或者 Python 编程，从均匀分布  $\mathcal{U}([0, 1])$  中抽取 1000 次  $X_0^i$  的取值， $i = 1, \dots, 1000$ 。对每个  $X_0^i$ ，再抽取 100 个  $\{\varepsilon_t^i\}_{t=1}^{100}$ ，并计算该组 AR(1) 样本  $\{X_t^i\}_{t=0}^{100}$ 。分别绘制  $\{X_{10k}^i\}_{i=1}^{1000}$  的样本直方图， $k = 0, 1, \dots, 10$ 。比较这一组样本分布与  $\rho = 0.8$  时过程平稳分布  $F_\infty(x)$  的差异。