国际金融试验班 2020 年秋 • 时间序列

第 6 讲：ARMA 过程的性质

授课人：刘　岩

武汉大学经管学院金融系

2020 年 10 月 22 日

本讲内容

本节内容

MA 过程的无条件矩 (unconditional moments)

- 给定 MA(q) 过程

$$X_t = \mu + \theta_0 \varepsilon_t + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

- 其期望为 $\mathbb{E}X_t = \mu$
- 方差为 $\mathrm{var}X_t = \sigma_X^2 = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{q} \theta_j^2$
- 自协方差为

$$\sigma_X^2(k) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{q-k} \theta_j \theta_{j+k}, & k = 0, \ldots, q \\ 0, & k > q \end{cases}$$

AR(1) 过程的无条件矩

- 给定 AR(1) 过程

$$X_t = \mu + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad |\phi| < 1$$

- 其期望为 $\mathbb{E}X_t = \frac{\mu}{1-\phi}$
- 方差为 $\mathrm{var}X_t = \sigma_X^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}$
- 自协方差为

$$\sigma_X^2(k) = \phi^k \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}$$

- 自相关系数为 $\rho_X(k) = \phi^k$

AR(1) 过程自协方差

- 计算可知，对平稳 AR(1) 过程有

$$\sigma_X^2(k) = \phi^k \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}$$

- 由此，可将高阶自协方差写为

$$\sigma_X^2(k) = \phi^k \sigma_X^2(0)$$

- 另一种写法：首先注意到 $\mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-1}]$，且

$$X_t X_{t-1} = \phi X_{t-1}^2 + \varepsilon_t X_{t-1}$$
$$\Rightarrow \mathbb{E}[X_t X_{t-1}] = \phi \mathbb{E}[X_{t-1}^2] + \mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-1}] \Rightarrow \sigma_X^2(1) = \phi \sigma_X^2(0)$$
$$X_t X_{t-(k+1)} = \phi X_{t-1} X_{t-(k+1)} + \varepsilon_t X_{t-(k+1)}$$
$$\Rightarrow \sigma_X^2(k+1) = \phi \sigma_X^2(k)$$

AR(p) 过程的无条件矩

- 给定平稳 AR(p) 过程

$$X_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t,$$

即特征多项式 $A(z) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i z^i$ 满足零点 $\{z_1, \ldots, z_p\}$ 在单位圆外

- 其期望为 $\mathbb{E}X_t = \frac{\mu}{A(1)}$
- 方差及自协方差的一般表达式要复杂一些

AR(2) 过程的例子

- 给定平稳 AR(2) 过程 $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$，特征多项式 $A(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$ 的两个零点均位于单位圆之外
- 两端分别乘以 X_{t-1}，X_{t-2} 可得

$$\sigma_X^2(1) = \phi_1 \sigma_X^2(0) + \phi_2 \sigma_X^2(1)$$
$$\sigma_X^2(2) = \phi_1 \sigma_X^2(1) + \phi_2 \sigma_X^2(0)$$

- 两端乘以 X_t，注意到 $\mathrm{cov}(X_t, \varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$，可得

$$\sigma_X^2(0) = \phi_1 \sigma_X^2(1) + \phi_2 \sigma_X^2(2) + \sigma_\varepsilon^2$$

AR(2) 过程的例子

- 上述 3 个方程，可以看做是 $\sigma_X^2(k)$, $k = 1, \ldots, 3$ 的线性方程组

$$\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 - 1 & 0 \\ \phi_2 & \phi_1 & -1 \\ 1 & -\phi_1 & -\phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_X^2(0) \\ \sigma_X^2(1) \\ \sigma_X^2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_\varepsilon^2 \end{bmatrix}$$

- 求解上述方程，可得到 $\sigma_X^2(k)$, $k = 1, \ldots, 3$ 的表达式
  - 思考：平稳性与上述方程系数矩阵的可逆性有什么关系？
- 使用 Cramer 法则，可直接写出系数矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 的逆：

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{\Phi}^*,$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}^*$ 为 $\boldsymbol{\Phi}$ 的伴随矩阵

AR(2) 过程的例子

- 给定 $\sigma_X^2(k)$, $k=1,\ldots,3$，可以递归计算平稳 AR(2) 过程的任意阶自协方差 $\sigma_X^2(k)$
- 在 $X_{t+k}=\phi_1 X_{t+k-1}+\phi_2 X_{t+k-2}+\varepsilon_{t+k}$, $k\geq 2$ 两端分别乘以 X_t 可得

$$\sigma_X^2(k)=\phi_1\sigma_X^2(k-1)+\phi_2\sigma_X^2(k-2),$$

进一步可写为

$$\begin{bmatrix}\sigma_X^2(k)\\ \sigma_X^2(k-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\phi_1 & \phi_2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_X^2(k-1)\\ \sigma_X^2(k-2)\end{bmatrix}$$

Yule-Walker 方程

- 给定平稳 AR(p) 过程 $X_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t$，特征多项式 $A(z) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i z^i$ 的 p 个零点均位于单位圆之外
- 两端依次乘以 $X_{t-1}, \ldots, X_{t-p}$，可得

$$\begin{bmatrix} \sigma_X^2(1) \\ \vdots \\ \sigma_X^2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2(0) & \cdots & \sigma_X^2(p-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_X^2(p-1) & \cdots & \sigma_X^2(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix}$$

- 两端乘以 X_t 可得：

$$\sigma_X^2(0) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \sigma_X^2(i) + \sigma_\varepsilon^2$$

- 上述两组方程，称为 Yule-Walker 方程

本节内容

AR(1) 的估计：自回归系数

- 假设数据（观测值）序列 $\{X_t\}_{t=1}^T$ 满足一个 AR(1) 过程 $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$，但参数 ϕ, σ_ε 未知
  - 这个 AR(1) 过程就是 $\{X_t\}$ 的 DGP
- 问题：如何估计 ϕ 以及 σ_ε?
- 联想 AR(1) 的 Yule-Walker 方程 $\phi = \sigma_X^2(1)/\sigma_X^2(0)$，可以得到一个 ϕ 的一个估计值

$$\hat{\phi} = \frac{\hat{\sigma}_X^2(1)}{\hat{\sigma}_X^2(0)}$$

其中，$\hat{\sigma}_X^2(1), \hat{\sigma}_X^2(0)$ 分别为 $\{X_t\}$ 的 1-阶样本自协方差与样本方差；后两者的一致性保证了 $\hat{\phi}$ 的一致性

AR(1) 的估计：冲击项方差

- 暂时回归 σ_ε^2 的估计问题
- 利用大数律，自然的想法是利用样本方差 $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2$ 来估计 σ_ε^2；但唯一的观测值为 $\{X_t\}$，而非 $\{\varepsilon_t\}$
- 但是，若有一致估计量 $\hat{\phi}_T$，则大样本下

$$e_t = X_t - \hat{\phi}_T X_{t-1} \xrightarrow{\text{a.s.}} X_t - \phi X_{t-1} = \varepsilon_t$$

因此，可利用冲击项 ε_t 的样本估计值 e_t 来估计 σ_ε^2:

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=2}^T e_t^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=2}^T (X_t - \hat{\phi}_T X_{t-1})^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} \sigma_\varepsilon^2$$

AR(p) 的估计：自回归系数

- 假设数据（观测值）序列 $\{X_t\}_{t=1}^T$ 满足一个 AR(p) 过程 $X_t = \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t$，但参数 $\phi_1, \ldots, \phi_p, \sigma_\varepsilon$ 未知
- 类似于 AR(1)，如果有 ϕ_i 的一致估计 $\hat{\phi}_i$，则可计算样本冲击 e_t，从而用 $\hat{\sigma}_e^2$（一致）估计 σ_ε^2
- 从 Yule-Walker 方程出发，可以得到

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2(0) & \cdots & \sigma_X^2(p-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_X^2(p-1) & \cdots & \sigma_X^2(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_X^2(1) \\ \vdots \\ \sigma_X^2(p) \end{bmatrix}$$

AR(p) 自回归系数的 Yule-Walker 估计

- 给定样本 T 足够大，则样本自协方差是对 X_t 总体自协方差的一致估计
- 在 Yule-Walker 方程中应用样本自协方差，则可以得到 $\phi_1, \ldots, \phi_p$ 的一致估计

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_X^2(0) & \cdots & \hat{\sigma}_X^2(p-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\sigma}_X^2(p-1) & \cdots & \hat{\sigma}_X^2(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_X^2(1) \\ \vdots \\ \hat{\sigma}_X^2(p) \end{bmatrix}$$