国际金融试验班 2020 年秋 · 时间序列

第 5 讲：平稳时间序列初步

授课人：刘　岩

武汉大学经管学院金融系

2020 年 10 月 15 日

本讲内容

本节内容

平稳性的两个定义

给定双边无穷时间序列 $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$

1. 协方差平稳性 (covariance stationarity)：$\{X_t\}$ 称为协方差平稳序列，如果 $\mathbb{E}X_t = \mu$，$\mathrm{cov}(X_t, X_{t-k}) = \sigma_k^2$，$k = 0, \ldots, \infty$，均不依赖于 t
   - 协方差平稳性又称为 2-阶矩平稳或矩平稳
2. 严平稳性 (strict stationarity)：$\{X_t\}$ 称为严平稳序列，如果 $\forall k = 0, \ldots, \infty$,
   $$(X_t, \ldots, X_{t-k})$$
   的分布与 t 无关
3. 本门课中，“平稳”序列同时满足上述两个定义
   - 这两个定义互相不蕴含对方

平稳性与趋势、季节性

- 平稳性与趋势不兼容
  - X_t 平稳，则 $\mathbb{E}X_t = \mu$ 为常数，且大数定律意味着 $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t \to \mu$；均值回归倾向
  - 趋势意味着 X_t 的样本均值不会收敛
- 平稳性与季节性兼容
  - 季节性变量：$\{S_t\}$ 满足 $S_{t+p} = S_t, \forall t$，p 表示季节周期
  - 对任意 t，$\sum_{0\le k\le p-1} S_{t+k}$ 为常数
  - 如果把 $X_t = Y_t + S_t$，Y_t 平稳，且将 X_t 的期望理解为一个季节周期上的均值，则 X_t 也平稳
  - 例如，令 $U \sim \mathcal{U}([-\pi,\pi])$，$X_t = \cos(t+U)$, $t\in\mathbb{Z}$，可验证 $\mathbb{E}X_t$ 及 $\sigma_k^2 = \operatorname{cov}(X_{t+k}, X_t)$ 与 t 无关；但 σ_k^2 呈现周期性

平稳性和平稳分布

- 平稳性定义中的期望和协方差，都是在平稳分布 (stationary distribution) 下计算的
  - 这个分布就是严平稳概念中的 1-元变量 X_t 服从的分布
- 一般而言，随机过程是否存在平稳分布是个问题
  - $X_0 = 0$，$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$，$\varepsilon_t \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$，就不存在平稳分布
  - 给定一个有限状态马氏链 $X_t \in \{1, 2\}$，转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \rho & 1-\rho \\ 1-\rho & \rho \end{bmatrix}$$

$\rho \in (0, 1)$，则 X_t 有平稳分布 $\mathbf{u} = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

- 即便随机过程存在平稳分布，从任何一个起点 $X_0 = \bar{x}$ 开始，X_t 的分布会不会逐渐收敛到平稳分布，也是一个问题

本节内容

白噪声

- 白噪声 (white noise) 是最常见的一类平稳时间序列
- $\{\varepsilon_t\}$ 是白噪声，若满足 $\mathbb{E}\varepsilon_t = 0$，$\mathrm{var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 > 0$，以及 $\mathrm{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0,\ \forall k \geq 0$
- iid 序列是白噪声，反之不成立
- 但大部分时间序列模型中，均假设白噪声——经常又称作新息 (innovation) 或冲击 (shock)——是 iid 序列

自协方差与自相关系数

给定平稳时间序列 $\{X_t\}$

- 平稳时间序列最基本的分析对象：自协方差函数 (autocovariance function, ACF) $\sigma_X^2(k) = \mathrm{cov}(X_t, X_{t-k})$
  - Cauchy-Schwartz 不等式：$[\mathrm{cov}(X, Y)]^2 \leq \mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y)$
  - 自协方差 $\sigma_X^2(k) \leq \sigma_X^2(0) = \mathrm{var}(X_t)$
- 自相关系数函数 (autocorrelation function, ACF) $\rho_X(k) = \sigma_X^2(k)/\sigma_X^2(0)$
  - 自相关系数反映的是序列的持续性(persistence)：$t-k$ 期取值和 t 期取值的同步特征

偏自相关系数

给定时间序列 $\{X_t\}_{t=1}^T$

- 还可以考虑另一种方法来描述数据的持续性特征，即偏自相关系数 (partial autocorrelation)
- 考虑 X_t 对 X_{t-k}, $k = 1, \ldots, K < T$ 的回归方程

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + \cdots + \beta_K X_{t-K} + e_t$$

- 上述回归方程系数 β_k 的 OLS (ordinary least square) 估计值 $\hat{\beta}_k$ 就称为 X_t 的 k-阶偏自相关系数（估计值）
  - 偏自相关系数与自相关系数之间有紧密联系；以 AR(1) 模型为例，$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t$，$|\rho| < 1$，$\varepsilon_t$ 为白噪声，则其 1-阶自相关系数等于 1-阶偏自相关系数
  - 但一般情况下，并不相等

本节内容

线性时间序列

- 本课程大部分内容考虑线性 (linear) 时间序列
- 给定白噪声序列 $\{\varepsilon_t\}$，时间序列 $\{X_t\}$ 称为关于 $\{\varepsilon_t\}$ 的线性时间序列，若
$$X_t = \sum_{k=0}^{K} \phi_k \varepsilon_{t-k},$$
其中 K 的取值可以是有限值，也可以是无限值
- 当 $K = \infty$ 时，通常要求 $\{\phi_k\}$ 满足绝对和收敛 (absolutely summable)，即 $\sum_{k=0}^{\infty} |\phi_k| < \infty$
- 另一种要求是满足平方和收敛 (square summable)，即 $\sum_{k=0}^{\infty} \phi_k^2 < \infty$

线性时间序列示例

事实上，所有线性时间序列都是平稳序列，具体例子如下

- q-阶移动平均 (moving average) 过程 MA(q)：给定白噪声 $\{\varepsilon_t\}$，$X_t = \sum_{j=0}^{q} \phi_j \varepsilon_{t-j}$，其中 $\{\phi_j\} \in \mathbb{R}$
    - q 称为滞后期 (lag period)；可为无穷，记为 MA(∞)
- 1-阶自回归 (autoregressive) 过程 AR(1)：$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t$，$|\rho| < 1$
    - 可递归的写为 MA(∞) 过程：$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i}$

滞后算子

- 为了简化记法、方便运算，定义滞后算子 (lag operator) $\mathscr{L}$，其作用是将 t 期变量变换为 $t-1$ 期变量：

$$\mathscr{L} : X_t \mapsto X_{t-1}$$

记做 $\mathscr{L} X_t = X_{t-1}$

- 进一步定义之后算子的“乘法”或是“复合”：

$$\underbrace{\mathscr{L} \circ \cdots \circ \mathscr{L}}_{k\text{ 次}} \equiv \mathscr{L}^k : X_t \mapsto X_{t-k}$$

记做 $\mathscr{L}^k X_t = X_{t-k}$

算子多项式

- 滞后算子可以当做变元 x，写为多项式形式，如 $\mathscr{L}+\rho\mathscr{L}^2$，其作用就是把 X_t 变做 $(\mathscr{L}+\rho\mathscr{L}^2)X_t = X_{t-1}+\rho X_{t-2}$
- 如此，可将一般的线性时间序列表达式写为之后算子多项式表达的形式：令

$$A(\mathscr{L}) = \sum_{k=0}^{K} \phi_k \mathscr{L}^k,$$

  则再前页 X_t 可写为 $X_t = A(\mathscr{L})\varepsilon_t$
- 类似的，可将 AR(1) 写为 $X_t - \rho X_{t-1} = (1-\rho\mathscr{L})X_t = \varepsilon_t$
  - 形式上还可以进一步写为 $X_t = \frac{1}{1-\rho\mathscr{L}}\varepsilon_t$，再利用 $\frac{1}{1-\rho\mathscr{L}} = \sum_{i=0}^{\infty}\rho^i\mathscr{L}^i$，则得到 MA($\infty$) 表达

Wold 表示

线性序列都是平稳序列；反之，我们有 Wold 表示定理

定理 1 (Wold)

任意的平稳序列 $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ 都可以表示为如下两部分的和：

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \varepsilon_{t-j} + V_t,$$

其中，

1. $\{\varepsilon_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ 是白噪声序列
2. $\{\phi_j\}_{j=0}^{\infty}$ 平方和收敛 $\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j^2 < \infty$
3. $\forall t$, $\mathrm{cov}(V_t, \varepsilon_t) = 0$，且 V_t 可通过由过去信息 $\{X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\}$ 的线性组合完全决定

本节内容

ARMA 过程的表示

- ARMA：自回归移动平均 (autoregressive moving average)
- ARMA(p,q)：p-阶自回归，q-阶移动平均，$\{\varepsilon_t\}$ 为白噪声

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}, \qquad \phi_p, \theta_q \neq 0$$

- 滞后算子表示

$$A(\mathscr{L})X_t = B(\mathscr{L})\varepsilon_t,$$

$$A(\mathscr{L}) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i \mathscr{L}^i, \qquad B(\mathscr{L}) = \sum_{j=0}^{q} \theta_j \mathscr{L}^j$$

AR 过程与 MA 过程

- 若 $B(\mathscr{L}) = 1$，则 $A(\mathscr{L})X_t = \varepsilon_t$，称为 AR($p$) 过程
    - 如 $A(\mathscr{L}) = 1 - \rho\mathscr{L}$，则是 AR(1) 过程
    - 若 $|\rho| < 1$，则 $(1 - \rho\mathscr{L})^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \mathscr{L}^i$ 收敛
    - 此时 $X_t = A^{-1}(\mathscr{L})\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i}$
- 若 $A(\mathscr{L}) = 1$，则 $X_t = B(\mathscr{L})\varepsilon_t$，称为 MA($q$) 过程
    - 如 $B(\mathscr{L}) = 1 + \theta\mathscr{L}$，则是 MA(1) 过程
    - 若 $|\theta| < 1$，则 $(1 + \theta\mathscr{L})^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}(-\theta)^j \mathscr{L}^j$ 收敛
    - 此时有 $\varepsilon_t = B^{-1}(\mathscr{L})X_t = \sum_{j=0}^{\infty}(-\theta)^j X_{t-j}$

ARMA 过程的特征多项式

- 给定 ARMA(p,q) 过程 $A(\mathscr{L})X_t = B(\mathscr{L})\varepsilon_t$
- 将 $A(\mathscr{L}) = 1 - \sum_{i=1}^{p}\phi_i\mathscr{L}^i$ 对应的多项式 $A(z) = 1 - \sum_{i=1}^{p}\phi_i z^i$ 称为 AR 部分的特征多项式 (characteristic polynomial)
- 将 $B(\mathscr{L}) = 1 + \sum_{j=1}^{q}\theta_j\mathscr{L}^j$ 对应的多项式 $B(z) = 1 + \sum_{j=1}^{p}\theta_j z^j$ 称为 MA 部分的特征多项式
- 特征多项式的零点具有重要的性质！

特征多项式分解

- **代数基本定理**：考虑 n-阶多项式 $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$，$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$，则 $P(z)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 有 n 个零点 $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$
- $P(z)$ 可写为

$$P(z) = (z - z_1) \times \cdots \times (z - z_n)$$

- 若特征多项式为 $P(z)$，则对应的滞后算子多项式 $P(\mathscr{L})$ 可分解为

$$P(\mathscr{L}) = (\mathscr{L} - z_1) \times \cdots \times (\mathscr{L} - z_n)$$

ARMA 过程的平稳性

- 有限阶 MA(q) 过程一定是平稳过程
  - 请验证！
- ARMA(p,q) 平稳性决定于 AR 部分特征多项式 $A(z)$ 的零点分布
- 首先说明，如果 $\{Y_t\}$ 是平稳过程，那么当复数 $\rho \in \mathbb{C}$ 的模长 (modulus) $|\rho| < 1$ 时，由 $(1-\rho\mathscr{L})X_t = Y_t$ 所确定的 $\{X_t\}$ 也是平稳过程
- 再说明，如果 $A(z)$ 零点均位于复平面单位圆之外，则 $A(\mathscr{L})X_t = B(\mathscr{L})\varepsilon_t$ 确定的 $\{X_t\}$ 是平稳过程

平稳 ARMA 过程与 Wold 表示

- 令 $z_1, \ldots, z_p$ 为平稳 ARMA(p,q) 过程 AR 部分特征多项式零点，则 $|z_1|, \ldots, |z_p| > 1$，且有

$$A(z) = \left(1 - \frac{1}{z_1} z\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{z_p} z\right)$$

- 因此 $A(\mathscr{L})X_t = B(\mathscr{L})\varepsilon_t$ 可写为

$$\left(1 - \frac{1}{z_1}\mathscr{L}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{z_p}\mathscr{L}\right) X_t = B(\mathscr{L})\varepsilon_t$$

$$\Rightarrow \quad X_t = \frac{1}{1 - \frac{1}{z_1}\mathscr{L}} \cdots \frac{1}{1 - \frac{1}{z_p}\mathscr{L}} B(\mathscr{L})\varepsilon_t$$

MA 过程的可逆性

- 前面看到，MA(1) $X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$，如果 $|\theta| < 1$，则有 $\varepsilon_t = (1+\theta\mathscr{L})^{-1}X_t$，亦为平稳过程
- 有限阶 MA(q) 过程，$X_t = B(\mathscr{L})\varepsilon_t$，若特征多项式 $B(w) = (w-w_1)\cdots(w-w_q)$ 的零点 $w_1,\ldots,w_q$ 均在复平面单位圆之外，则称 X_t 可逆 (invertable)，且有

$$\varepsilon_t = B^{-1}(\mathscr{L})X_t = \frac{(-1)^q}{w_1\cdots w_q}\frac{1}{1-\frac{1}{w_1}\mathscr{L}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{w_q}\mathscr{L}}X_t$$

- ARMA(p,q) 过程称为可逆的，若其 MA 部分可逆

ARMA 过程与可约性

- 考虑“形式上”的 ARMA(2, 1) 过程
  $X_t = X_{t-1} - 0.25X_{t-2} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$，对应的特征多项式为

$$A(\mathscr{L}) = 1 - \mathscr{L} + 0.25\mathscr{L}^2 = (1 - 0.5\mathscr{L})^2, \quad B(\mathscr{L}) = 1 - 0.5\mathscr{L}$$

ARMA 过程与可约性

- 考虑“形式上”的 ARMA(2, 1) 过程
  $X_t = X_{t-1} - 0.25X_{t-2} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$，对应的特征多项式为

$$A(\mathscr{L}) = 1 - \mathscr{L} + 0.25\mathscr{L}^2 = (1 - 0.5\mathscr{L})^2, \quad B(\mathscr{L}) = 1 - 0.5\mathscr{L}$$

$$\Rightarrow (1 - 0.5\mathscr{L})^2 X_t = (1 - 0.5\mathscr{L})\varepsilon_t$$

ARMA 过程与可约性

- 考虑“形式上”的 ARMA(2, 1) 过程
  $X_t = X_{t-1} - 0.25X_{t-2} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$，对应的特征多项式为

$$A(\mathscr{L}) = 1 - \mathscr{L} + 0.25\mathscr{L}^2 = (1 - 0.5\mathscr{L})^2, \quad B(\mathscr{L}) = 1 - 0.5\mathscr{L}$$

$$\Rightarrow (1 - 0.5\mathscr{L})^2 X_t = (1 - 0.5\mathscr{L})\varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow (1 - 0.5\mathscr{L})X_t = \varepsilon_t, \quad \text{ARMA}(1, 0)!$$

ARMA 过程与可约性

- 考虑“形式上”的 ARMA(2, 1) 过程
  $X_t = X_{t-1} - 0.25X_{t-2} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$，对应的特征多项式为

$$A(\mathscr{L}) = 1 - \mathscr{L} + 0.25\mathscr{L}^2 = (1 - 0.5\mathscr{L})^2, \quad B(\mathscr{L}) = 1 - 0.5\mathscr{L}$$

$$\Rightarrow (1 - 0.5\mathscr{L})^2 X_t = (1 - 0.5\mathscr{L})\varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow (1 - 0.5\mathscr{L})X_t = \varepsilon_t, \quad \text{ARMA}(1, 0)!$$

- 此 ARMA(2, 1) 过程实质是一个 ARMA(1, 0) 过程

ARMA 过程与可约性

- 考虑“形式上”的 ARMA(2,1) 过程 $X_t = X_{t-1} - 0.25X_{t-2} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$，对应的特征多项式为

$$A(\mathscr{L}) = 1 - \mathscr{L} + 0.25\mathscr{L}^2 = (1-0.5\mathscr{L})^2, \quad B(\mathscr{L}) = 1 - 0.5\mathscr{L}$$

$$\Rightarrow (1-0.5\mathscr{L})^2 X_t = (1-0.5\mathscr{L})\varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow (1-0.5\mathscr{L})X_t = \varepsilon_t, \quad \text{ARMA}(1,0)!$$

- 此 ARMA(2,1) 过程实质是一个 ARMA(1,0) 过程
- 为避免此情形，一般均要求 $A(z)$ 的零点 $\{z_1, \ldots, z_p\}$ 与 $B(z)$ 的零点 $\{w_1, \ldots, w_q\}$ 互不相同
  - 若有 $z_i = w_j$，称该过程可约 (reducible)；若 X_t 是 ARMA(p,q) 过程，一般要求其不可约