国际金融试验班 2020 年秋 · 时间序列

第 13 讲：时间序列的谱、周期性与趋势

授课人：刘　岩

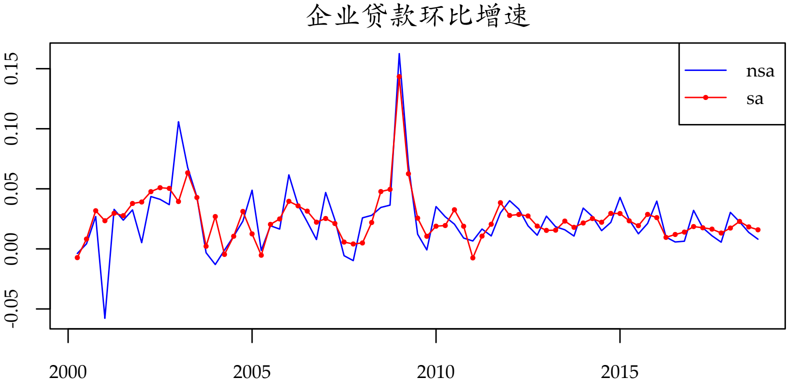
武汉大学经管学院金融系

2020 年 12 月 24 日

本讲内容

本节内容

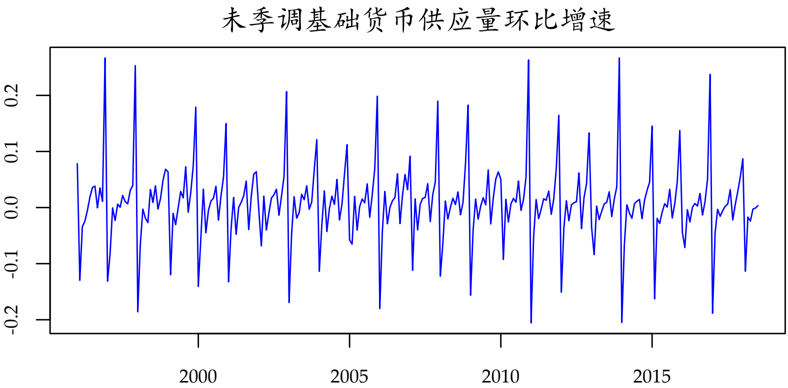
示例 1：贷款环比增速



nsa: not seanonally adjusted　　sa: seasonally adjusted

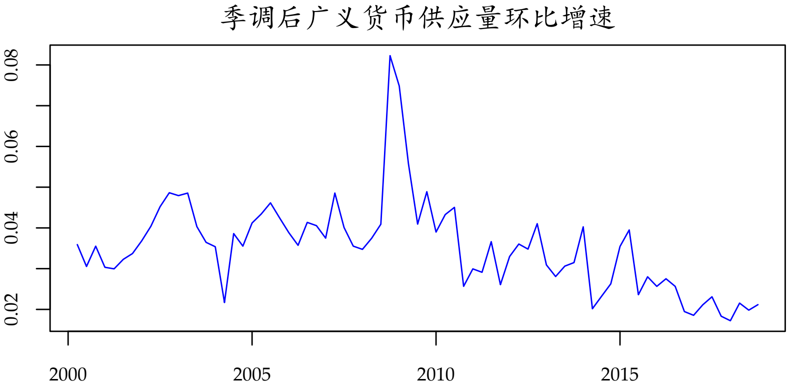
- 未经季节调整的序列，有年度（4 季度）周期波动特征

示例 2：M0 环比增速



- 该序列未经过季调，可以看到明显的季节性周期性波动特征

示例 3：M2 环比增速



- 该序列虽然经过季调，但仍然可以看到有周期性波动特征：波峰到波峰 (peak to peak)，波谷到波谷 (trough to trough)

谱函数：定义

- 经济或金融时间序列样本 $\{X_t\}_{t=1}^{T}$ 通常会表现出肉眼可见的“周期性”
- 具体刻画这种“周期性”，需要引入谱 (spectrum) 的概念
- 给定平稳时间序列 $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ 及其自协方差函数 $\gamma(k)$，$k \in \mathbb{Z}$，对 $\omega \in \mathbb{R}$，定义

$$s_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) e^{-\mathrm{i}\omega k},$$

  i 为虚根，称 $s_X(\omega)$ 为 $\{X_t\}$ 的谱（密度）函数 (spectrum density function)
- 谱是数学中的一个通用概念，用于刻画数学对象的本质特征
  - 矩阵特征值又称为矩阵的谱；随机变量的特征函数也是一种谱函数

谱函数：条件与性质

- 谱函数定义中，对 $\{\gamma(k)\}$ 序列的收敛性有一定要求
  - 至少要求平方和收敛 $\sum_k \gamma^2(k) < \infty$
  - 若绝对和收敛 $\sum_k |\gamma(k)| < \infty$，则谱函数 $s_X(\omega)$ 具有好的性质
- 若 $s_X(\omega)$ 是 $\{X_t\}$ 的谱函数，则对应的自协方差函数满足下述求逆公式：

$$\gamma(k) = \int_{-\pi}^{\pi} s_X(\omega) e^{\mathrm{i}\omega k} \mathrm{d}\omega$$

- 由 DeMoivre 公式 $e^{\mathrm{i}\omega k} = \cos(\omega k) - \mathrm{i}\sin(\omega k)$ 可得

$$\begin{aligned} s_X(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k)[\cos(\omega k) - \mathrm{i}\sin(\omega k)] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\gamma(0) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k)\cos(\omega k)\right] \end{aligned}$$

谱函数的直观讨论

- 三角函数 $\cos(\omega t), \sin(\omega t)$ 反映了频率为 ω 的周期波动
  - 相应的周期为 $2\pi/\omega$
- 给定随机变量 $\alpha(\omega)$ 与 $\beta(\omega)$，定义

$$X_t^\omega = \alpha(\omega)\cos(\omega t) + \beta(\omega)\sin(\omega t),$$

  则 X_t^ω 自然具有波动频率 ω
- 假设时间序列变量 X_t 可以分解为一系列（无穷小）频率区间上 X_t^ω 的和

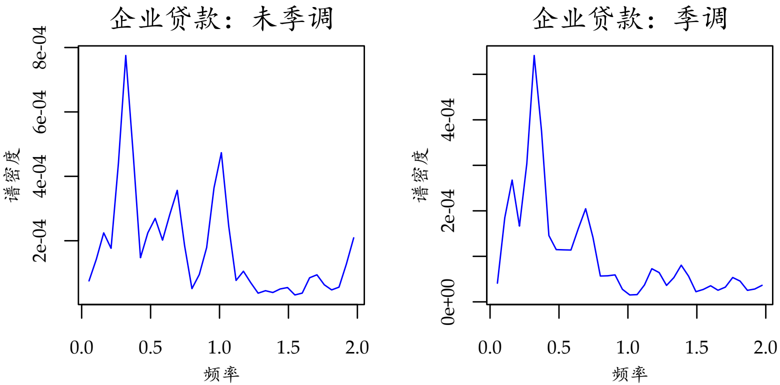
$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} X_t^\omega \mathrm{d}\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(\omega)\cos(\omega t)\mathrm{d}\omega + \int_{0}^{\pi} \beta(\omega)\sin(\omega t)\mathrm{d}\omega,$$

  则 X_t^ω 可看做 X_t 的周期波动中频率为 ω 的成分

谱函数：非参数估计

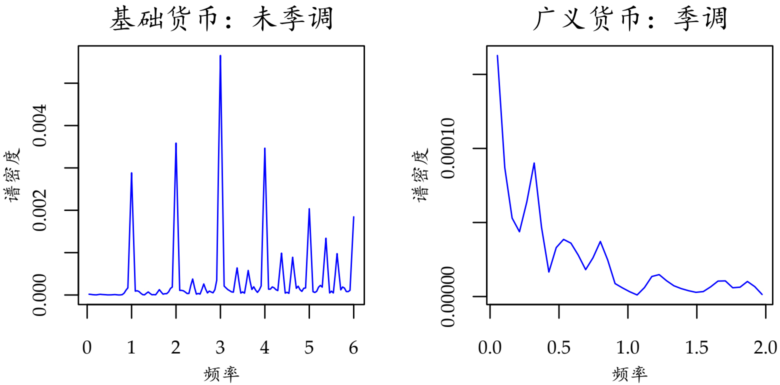
- 由上页表达式可知，谱函数的一个直观样本估计为
$$\hat{s}_X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[\hat{\gamma}(0) + 2\sum_{k=1}^{K}\hat{\gamma}(k)\cos(\omega k)\right]$$
其中 $K < \infty$ 为某一个有限截断期限，$\hat{\gamma}(k)$ 为样本估计
- 统计软件中，$\hat{s}_X(\omega)$ 的默认估计方式更加精细：给定 T 个样本及 $\omega_j \equiv= j/T$，$j = 1, \ldots, T$，通常是选定 $m \in \mathbb{N}$，并在一个小区间 $\mathcal{B}_j = \{\omega : \omega_j - m/T \le \omega \le \omega_j + m/T\}$ 上取平均计算 $\hat{s}_X(\omega), \omega \in \mathcal{B}_j$
    - 每个 $\mathcal{B}_j$ 中都有 $L = 2m + 1$ 个离散格点 $\omega_j + k/T$，$k = -m, \ldots, m$
    - R 中使用 spec.pgram 函数估计样本谱函数时，span 选项取值对应了 L；另一个常用参数 taper 控制了临近频率点位谱估计值相互间的干扰，通常去默认值 0.1 即可

谱密度估计：企业贷款环比增速



- 横坐标取值上限为 2，对应数据自然频率（季度）4 除 2
- 未季调谱密度 $\omega = 1$ 处的尖峰意味着每 $4/1 = 4$ 个季度有一个周期，即年度周期

谱密度估计：货币供应量环比增速



- 基础货币（左）为月度数据，广义货币（右）为季度数据
- M0 谱密度 $\omega = 1$ 处的尖峰意味着每 $12/1 = 12$ 个月度有一个周期，即年度周期；$\omega = 3$ 出的尖峰意味着季度周期

本节内容

时间序列的周期项与趋势项

- 应用时间序列分析的一个重要内容：区分时间序列的周期项 (cycle) 与趋势项 (trend)

$$X_t = X_t^{\text{cycle}} + X_t^{\text{trend}}$$

- 时间序列的谱函数：揭示出时间序列的许多周期信息
  - 高频部分：短周期，$1/\omega$ 小
  - 低频部分：长周期，$1/\omega$ 大
- 时间序列的趋势：可以理解为序列中对应低频周期项的部分

$$X_t^{\text{trend}} = X_t^{\text{low freq}} \qquad X_t^{\text{cycle}} = X_t^{\text{high freq}}$$

- 时间序列低频与高频、趋势与周期的分离，称为时间序列的滤波 (filter)

时间序列的线性滤波

- 最常用的时间序列滤波方法为线性滤波 (linear filter)
- 线性滤波的一般形式

$$X_t^f = \sum_{j=-q}^{r} c_j X_{t-j} \equiv C(\mathscr{L}) X_t$$

  其中 $C(\mathscr{L})$ 为滤波算子
  - 注意滤波算子中既可以包括 X_t 的滞后项 $j = 1, \ldots, r$，也可以包括超前项 $j = -1, \ldots, -q$
  - 线性滤波的滞后、超前期限 s, r 均可为无穷
- 一般而言，滤波所得结果 X_t^f 代表 X_t 的趋势项

滤波的谱表示：X_t^f 的自协方差

- 为简便，假设 X_t 期望为 0
- 趋势项 X_t^f 的自协方差 $\gamma_f(k) = \mathbb{E}X_t^f X_{t-k}^f$ 为

$$\begin{aligned}
\gamma_f(k) &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=-q}^{r} c_j X_{t-j}\right)\left(\sum_{\ell=-q}^{r} c_i X_{t-k-\ell}\right) \\
&= \mathbb{E}\sum_{j=-q}^{r}\sum_{\ell=-q}^{r} c_j c_i X_{t-j} X_{t-k-\ell} \\
&= \sum_{j=-q}^{r}\sum_{\ell=-q}^{r} c_j c_\ell \gamma(k+\ell-j)
\end{aligned}$$

滤波的谱表示：X_t^f 的谱函数

- 由谱函数定义得：

$$
\begin{aligned}
s_{X^f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_f(k)e^{-\mathrm{i}\omega k} \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=-q}^{r}\sum_{\ell=-q}^{r}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_j c_\ell \gamma(k+\ell-j)e^{-\mathrm{i}\omega k}
\end{aligned}
$$

- 令 $h=k+\ell-j$，则 $e^{-\mathrm{i}\omega k}=e^{-\mathrm{i}\omega(h+j-\ell)}=e^{-\mathrm{i}\omega h}e^{-\mathrm{i}\omega j}e^{\mathrm{i}\omega\ell}$，故

$$
\begin{aligned}
s_{X^f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=-q}^{r}\sum_{\ell=-q}^{r}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_j c_\ell \gamma(k+\ell-j)e^{-\mathrm{i}\omega h}e^{-\mathrm{i}\omega j}e^{\mathrm{i}\omega\ell} \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=-q}^{r}c_j e^{-\mathrm{i}\omega j}\sum_{\ell=-q}^{r}c_\ell e^{\mathrm{i}\omega\ell}\sum_{h=-\infty}^{\infty}\gamma(h)e^{-\mathrm{i}\omega h} \\
&= C(e^{-\mathrm{i}\omega})C(e^{\mathrm{i}\omega})s_X(\omega)
\end{aligned}
$$

滤波的谱表示：增益函数

- 给定滤波多项式 $C(z) = \sum_{j=-q}^{r} c_j z^j$，$z \in \mathbb{C}$，定义增益 (gain) 函数为

$$G(\omega) = |C(e^{-\mathrm{i}\omega})| = \sqrt{C(e^{-\mathrm{i}\omega})\overline{C(e^{-\mathrm{i}\omega})}} = \sqrt{C(e^{-\mathrm{i}\omega})C(e^{\mathrm{i}\omega})}$$

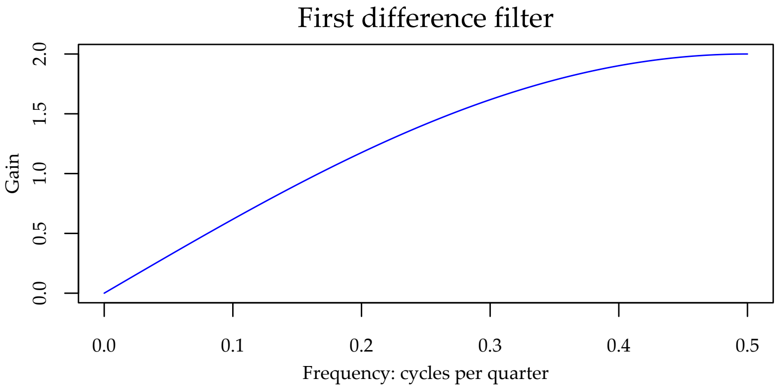
  其中 $\overline{C(e^{-\mathrm{i}\omega})}$ 表示 $C(e^{-\mathrm{i}\omega})$ 的复共轭

- 滤波序列的谱函数可写为

$$s_{X^f}(\omega) = G^2(\omega) s_X(\omega)$$

  即 X_t 不同频率 ω 处周期性的强弱通过 $G(\omega)$ 放大或者缩小，转移到 X_t^f 中

1 阶差分滤波



- 1 阶差分滤波算子为 $1-\mathscr{L}$，滤波多项式为 $1-z$
- 增益函数为 $G(\omega)=\sqrt{2}\sqrt{1-\cos(\omega)}$

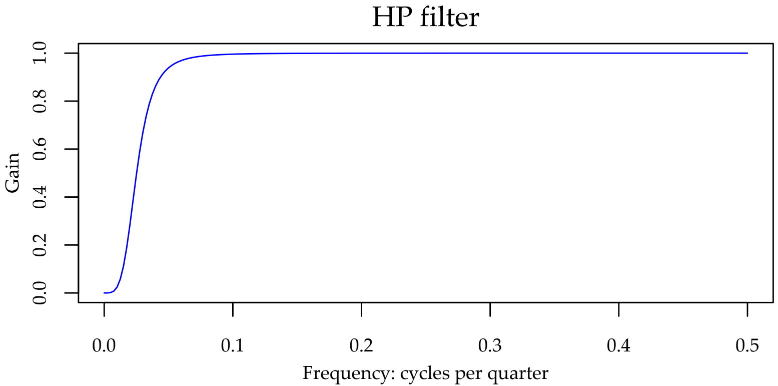
HP 滤波

- 给定样本序列 $\{X_t\}_{t=1}^T$，HP 滤波 (HP filter) 通过求解最小化问题获得趋势项 $\{\tilde{X}_t\}$:

$$\{\tilde{X}_t\} = \operatorname{argmin}\left\{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \tilde{X}_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1}(\tilde{X}_{t+1} - 2\tilde{X}_t + \tilde{X}_{t-1})\right\}$$

  其中 $X_t - \tilde{X}_t$ 即为滤波所得周期项
- 对年度、季度、月度数据，λ 分别取值 6.25、1,600 与 129,600
- HP 滤波是经济中最流行的滤波算法，为 Hodrick & Prescott 的缩写
  - R 中 `mFilter` 包有 HP 滤波函数 `hpfilter`
  - 更理想的滤波算法为 BP (band pass) 滤波：只保留特定频率区间的数据周期波动

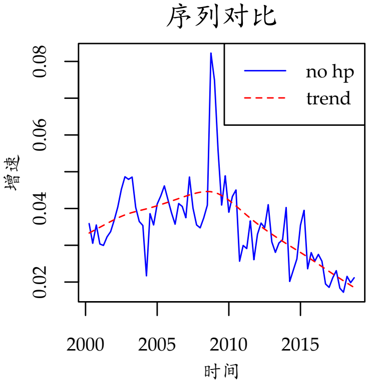
HP 滤波：增益函数

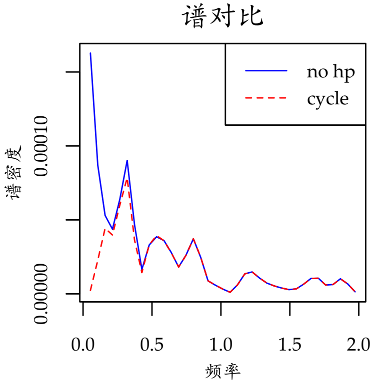


- 增益函数为

$$G(\omega) = \frac{4(1-\cos(\omega))^2}{\frac{1}{\lambda} + 4(1-\cos(\omega))^2}$$

HP 滤波示例：M2 增速





- HP 滤波有效去除了原始增速序列中低频、长周期（趋势）部分