国际金融试验班 2019 年秋 • 时间序列

第 4 讲：时间序列数据基本特征

授课人：刘　岩

武汉大学经管学院金融系

2019 年 9 月 26 日

本讲内容

本节内容

1. 基本统计特征
2. 趋势与季节性

时间序列数据主要统计特征

与普通数据序列一样，时间序列数据 $\{X_t\}$ 主要统计特征包括：

- 期望：$\mathbb{E}X_t$
- 方差、标准差：$\mathrm{var}(X_t), \sigma_X$
- 以及两个变量间的协方差：$\mathrm{cov}(X_t, Y_t)$ 及相关系数 ρ_{XY}

但与普通数据不同，时间序列数据的主要统计特征还包括

- 自协方差 (autocovariance)：$\mathrm{cov}(X_t, X_{t-k})$, $k \geq 1$
- 对应的，自相关系数 (autocorrelation)：

$$\rho_k = \frac{\mathrm{cov}(X_t, X_{t-k})}{\sigma_X^2}$$

- 注意，上述各阶矩和 t 无关 $\Rightarrow$ 平稳性假设

矩的估计

- 给定时间序列数据 $\{X_t\}_{t=1}^T$，各阶矩的估计 (estimate) 如下
- 期望（均值）：$\hat{\mu}_X = \frac{1}{T}\sum_t X_t$；$\sum_t$ 表示对 $t = 1, \ldots, T$ 求和
- 方差：

$$\hat{\sigma}_X^2 = \begin{cases} \frac{1}{T-1}\sum_t (X_t - \hat{\mu}_X)^2, & \text{unbiased} \\ \frac{1}{T}\sum_t (X_t - \hat{\mu}_X)^2, & \text{biased} \end{cases}$$

  大样本之下，无偏 (unbiased) 估计与有偏 (biased) 估计等价
- 协方差：

$$\hat{\sigma}_{XY} = \begin{cases} \frac{1}{T-1}\sum_t (X_t - \hat{\mu}_X)(Y_t - \hat{\mu}_Y), & \text{unbiased} \\ \frac{1}{T}\sum_t (X_t - \hat{\mu}_X)(Y_t - \hat{\mu}_Y), & \text{biased} \end{cases}$$

- 相关系数：$\hat{\rho}_{XY} = \hat{\sigma}_{XY}/(\hat{\sigma}_X\hat{\sigma}_Y)$

矩的估计

- 自协方差：

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{T-k} \sum_{t=k+1}^{T} (X_t - \hat{\mu}_X)(X_{t-k} - \hat{\mu}_X)$$

注意求和中 t 的取值范围

- 自相关系数：

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{\sigma}_X^2}$$

练习 估计值 $\hat{\rho}_{XY}, \hat{\rho}_k$ 是否仍然介于 ± 1 之间？

- 在上下文区分明确时，也可以略去“^”符号
- 但有时为明确样本量，也会增加 T 下标，如 $\hat{\mu}_{X,T}$

平稳时间序列的大数定律

给定时间序列数据 $\{X_t\}_{t=1}^{T}$，上述矩估计的理论基础在于<u>大数定律</u> (law of large number)

定理 1

当 X_t 满足特定条件时，样本均值以概率 1 收敛到总体均值

$$\lim_{T\to\infty} \hat{\mu}_{X,T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t = \mathbb{E}X_t$$

大数定律：注释

- 特定条件：弱于 $\{X_t\}$ iid；本课程中，可以理解为“平稳性条件”——严格说法是“严平稳遍历性条件”
- 收敛：随机变量的收敛概念有 4 种，依分布收敛 $\xrightarrow{\text{d}}$，依概率收敛 $\xrightarrow{\text{p}}$，矩收敛 $\xrightarrow{\text{m}}$，概率-1 收敛（几乎处处收敛）$\xrightarrow{\text{a.s.}}$
  - 假设有 r.v. 序列 $\{Z_t\}_{t=1}^{\infty}$ 和 r.v. Z，则称
    1. $Z_t \xrightarrow{\text{d}} Z$，若 $\lim_{t\to\infty} F_{Z_t}(z) = F_Z(z)$ 对几乎所有 z 成立
    2. $Z_t \xrightarrow{\text{p}} Z$，若 $\forall \varepsilon > 0$，$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(|Z_t - Z| \geq \varepsilon) = 0$
    3. $Z_t \xrightarrow{\text{m}} Z$，若 $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[(Z_t - Z)^2] = 0$
    4. $Z_t \xrightarrow{\text{a.s.}} Z$，若 $\mathbb{P}(\lim_{t\to\infty} Z_t = Z) = 1$
  - 4 种收敛的关系

$$\left\{ \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{a.s.}} \\ \xrightarrow{\text{m}} \end{array} \right\} \Rightarrow \xrightarrow{\text{p}} \Rightarrow \xrightarrow{\text{d}}$$

  - 大数定律中“收敛”可以达到 $\xrightarrow{\text{a.s.}}$

平稳性的关键性质

定理 2

若 $\{X_t\}$ 是平稳序列，对任意的 $k+1$-元可测函数 f，定义

$$Y_t = f(X_t, \ldots, X_{t-k})$$

则 $\{Y_t\}$ 也是平稳序列。

随机收敛的性质

定理 3

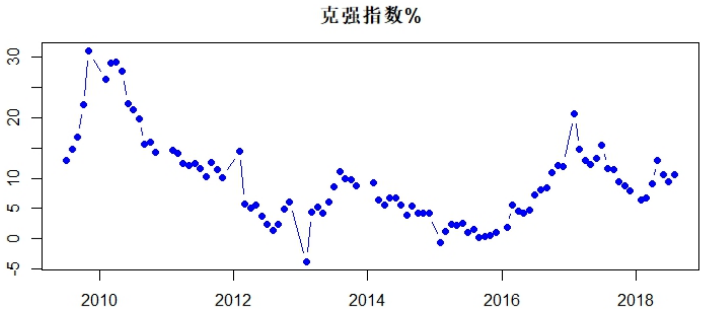
假设 $X_t \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, $Y_t \xrightarrow{\text{a.s.}} Y$，则对任意的可测函数 f，有

$$f(X_t, Y_t) \xrightarrow{\text{a.s.}} f(X, Y).$$

本节内容

时间序列的趋势性

- 时间序列关心数据在时间上的变动

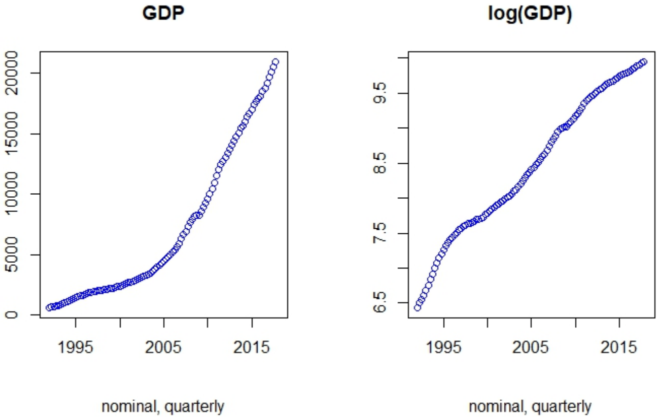


$\hat{\mu} = 9.53,\ \hat{\sigma} = 6.98,\ \hat{\rho} = 0.92$

- 有趋势 vs. 无趋势

趋势的常见类型

- 指数趋势 vs. 线性趋势



- 两者之间差一个对数变换：$X_t \Rightarrow \log(X_t)$

线性趋势调整：基本方法

- 原始数据 $\{X_t\}_{t=1}^T$ 包含线性趋势 $X_t = \alpha t + \tilde{X}_t$，而 $\tilde{X}_t$ 无趋势
- 两端取差分

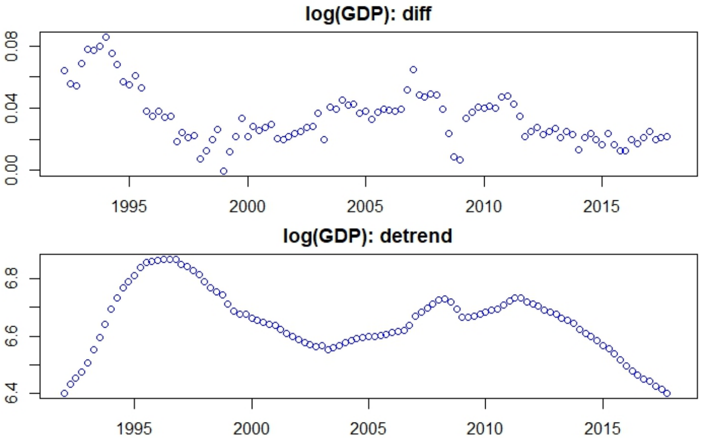
$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = \alpha + \tilde{X}_t - \tilde{X}_{t-1} = \alpha + \Delta \tilde{X}_t$$

  其中 Δ 表示差分算子，则 ΔX_t 不包含趋势
- 或者，如果要求 $\tilde{X}_1 = \tilde{X}_T$，则有

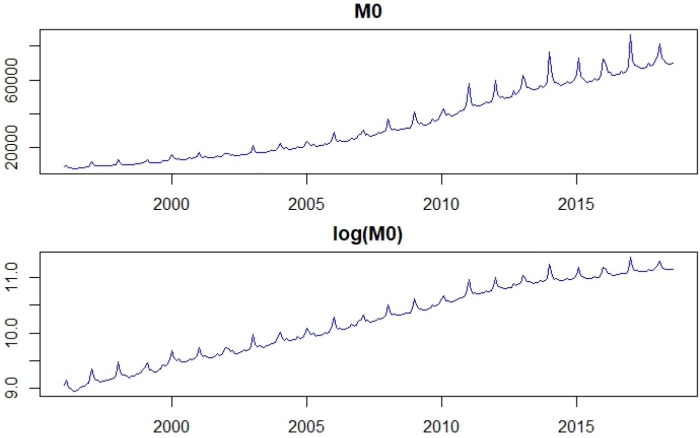
$$\alpha = \frac{X_T - X_1}{T - 1}$$

  从而可以推算 $\tilde{X}_t$
- 类似的过程称为去趋势 (detrend)

去趋势示例


log(GDP): diff
0.00
0.04
0.08
1995
2000
2005
2010
2015
log(GDP): detrend
6.4
6.6
6.8
1995
2000
2005
2010
2015

季节性示例



需要对原始数据进行季节调整 (seasonal adjustment)