

高级微观经济学

# 第 4 讲：不完全市场一般均衡模型

授课人：刘岩

武汉大学经管学院金融系

2023 年 10 月 17 日

## 本节内容

- 1 不完全市场均衡理论概述
- 2 均衡的存在性
- 3 均衡的效率
- 4 均衡的多重性

## 不完全市场理论的早期发展

- Radner (1972) 提出动态市场一般均衡理论框架
- Hart (1975) 指出不完全市场 (商品组合证券) 下: (1) 均衡可能不存在; (2) 均衡可能无效率; (3) 增加非冗余证券可能导致更差的配置效率
- 不完全市场理论在 80 年代的高潮:
  - Cass (1984), Werner (1985), Geanakoplos and Polemarchakis (1986) 等证明名义证券、计价物证券情形下均衡的存在性
  - Duffie and Shafer (1985) 证明商品组合证券下均衡“几乎处处”存在
  - Balasko and Cass (1989), Werner (1990), Geanakoplos and Mas-Colell (1989) 证明名义证券下均衡有严重的不定性(indeterminacy)
  - Geanakoplos and Polemarchakis (1986) 证明了“几乎所有”均衡都是无效率的

## 均衡效率概念的发展

- Diamond (1967) 研究了一个不完全市场均衡模型的特例，提出了约束效率的概念 (constrained efficiency); 并说明他所研究的例子中均衡是约束有效的
- Hart (1975) 的例子表明均衡可以是约束无效的
- 但令人满意的约束效率的概念直到 80 年代初才逐渐形成，主要包括 Stiglitz 及其合作者的多项工作
- 不完全市场是一种本质性的市场扭曲 (distortion), 约束无效性意味着，政府 (看得见的手) 恰当干预，有可能在 Pareto 意义下提高整体的资源配置效率，即不使一人受损，却一定能造福一方
  - 其他的市场扭曲还有很多：市场垄断势力，信息不对称，激励约束（道德风险）

## 不完全市场理论的后续发展

- 不完全市场理论早期发展 (以两期模型为主) 被总结在 Magill and Quinzii (1996) 的教课书中: **Theory of Incomplete Markets: Vol. I**
- 90 年代初不完全市场一般均衡理论主要在无穷期方面有所推进, 随后基本停滞
- 不完全市场模型在宏观经济学 (包括宏观金融) 中获得很大发展: 以 Bewley 的早期贡献为基础, 经过 Aiyagari (1994), Huggett (1993), Krusell and Smith (1998), Ríos-Rull (1995) 等人的贡献, 逐渐成为宏观经济学的主流分支
- 近年来 HANK (heterogeneous agent New Keynesian) 模型的成熟与流行, 是不完全市场一般均衡理论在量化政策分析方面的重要进展

## 基本经济环境：两期模型

- 基本商品空间  $X = \mathbb{R}_+^K$ ;  $t = 0, 1$
- 不确定性只发生在  $t = 1$ ,  $S = \{1, \dots, S\}$
- 家庭集合  $H = \{1, \dots, H\}$ ,  $\{U^h, e^h\}_{h \in H}$ ,  $U^h : X^{S+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(e_0^h, e_s^h)_{s \in S} \in X^{S+1}$
- 证券集合  $M = \{1, \dots, M\}$ , 支付矩阵  $A = [A_1, \dots, A_M]$
- 计价商品证券、名义证券:  $A_m = (a_{1m}, \dots, a_{Sm})^\top$ ;  
商品组合证券:  $A_m = (\dots, a_{s1m}, \dots, a_{sKm}, \dots)^\top$

## 不同类型证券对应的预算约束与均衡

价格系统  $(q, p) \in \mathbb{R}_+^M \times \mathbb{R}_+^{K(S+1)}$ ;  $x_0, x_s \in X$ ,  $y \in \mathbb{R}^M$

•  $t = 0$  的约束:  $p_0 \cdot x_0 + q \cdot y \leq p_0 \cdot e_0$

•  $t = 1$  的约束

计价商品证券:  $p_s \cdot x_s \leq p_s \cdot e_s + p_{s1} \sum_{m \in M} a_{sm} y_m$

名义证券:  $p_s \cdot x_s \leq p_s \cdot e_s + \sum_{m \in M} a_{sm} y_m$

商品组合证券: 支付总值依赖于即期市场的商品价格

$p_s \cdot x_s \leq p_s \cdot e_s + \sum_{m \in M} \left( \sum_{k \in K} p_{sk} a_{skm} \right) y_m$ , 因此, 证券市场是否完全依赖于即期市场的价格向量

竞争均衡  $\langle p, q, (x^h, y^h)_{h \in H} \rangle$ : 所有家庭实现预算约束集上效用最大化, 且市场出清

## 本节内容

- 1 不完全市场均衡理论概述
- 2 均衡的存在性**
- 3 均衡的效率
- 4 均衡的多重性

## Hart 的例子：基本设置

$H = K = S = 2$ ；两商品记为  $x, y$ ；两状态概率相等

- 效用只取决于  $t = 1$  的消费，用下标表示  $(x_{hs}, y_{hs})$
- 家庭 1 在每个状态中的 Bernoulli 效用为  $2^{5/2}x_{1s}^{1/2} + 2y_{1s}^{1/2}$ ，期望效用为

$$U_1 = 2^{3/2}x_{11}^{1/2} + y_{11}^{1/2} + 2^{3/2}x_{12}^{1/2} + y_{12}^{1/2}$$

- 家庭 2 的状态效用为  $2x_{2s}^{1/2} + 2^{5/2}y_{2s}^{1/2}$ ，期望效用为

$$U_2 = x_{21}^{1/2} + 2^{3/2}y_{21}^{1/2} + x_{22}^{1/2} + 2^{3/2}y_{22}^{1/2}$$

- 家庭 1 的禀赋： $e_{11} = (5/2, 50/21), e_{12} = (13/21, 1/2)$   
家庭 2 的禀赋： $e_{21} = (1/2, 13/21), e_{22} = (50/21, 5/2)$

## Hart 的例子：证券结构

• 两只证券：
$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 一单位  $A_1$  在两个状态均支付一单位商品  $x$ ；一单位  $A_2$  在两个状态均支付一单位商品  $y$
- 给定状态价格向量  $(p_1, p_2) = (p_{x1}, p_{y1}, p_{x2}, p_{y2})$ ，两个证券支付的价值矩阵为

$$V = \begin{bmatrix} p_{x1} & p_{y1} \\ p_{x2} & p_{y2} \end{bmatrix}$$

证券市场是否完全取决于  $V$  是否满秩

备选 RE 均衡的第一种情形： $p_1, p_2$  不成比例

- 若  $p_1, p_2$  不成比例，则两者线性无关，从而  $V$  是满秩矩阵
- 若  $V$  满秩，则 RE 均衡一定对应于一个 AD 均衡；假设这个 AD 均衡的价格向量为  $\bar{p} = (\bar{p}_{x1}, \bar{p}_{y1}, \bar{p}_{x2}, \bar{p}_{y2})$
- 家庭 1 的 AD 约束为
 
$$\bar{p}_{x1}x_{11} + \bar{p}_{y1}y_{11} + \bar{p}_{x2}x_{12} + \bar{p}_{y2}y_{12} \leq \bar{p}_{x1}5/2 + \bar{p}_{y1}50/21 + \bar{p}_{x2}13/21 + \bar{p}_{y2}1/2$$
- 家庭 2 的 AD 约束为
 
$$\bar{p}_{x1}x_{21} + \bar{p}_{y1}y_{21} + \bar{p}_{x2}x_{22} + \bar{p}_{y2}y_{22} \leq \bar{p}_{x1}1/2 + \bar{p}_{y1}13/21 + \bar{p}_{x2}50/21 + \bar{p}_{y2}5/2$$
- 市场出清条件为  $x_{1s} + x_{2s} = y_{1s} + y_{2s} = 3$

## 第一种情形的 AD 均衡

- 可解得唯一的 AD 均衡： $\bar{p} = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ ,

$$(x_{11}, y_{11}) = (x_{12}, y_{12}) = (8/3, 1/3)$$

$$(x_{21}, y_{21}) = (x_{22}, y_{22}) = (1/3, 8/3)$$

- 但由 AD 均衡与 RE 均衡的对应性质知，若  $(p_1, p_2)$  是 RE 均衡的价格向量，则应有

$$p_{x1}/p_{y1} = \bar{p}_{x1}/\bar{p}_{y1}, \quad p_{x2}/p_{y2} = \bar{p}_{x2}/\bar{p}_{y2},$$

与  $p_1, p_2$  不成比例的假设矛盾故此种情况下无 RE 均衡

备选 RE 均衡的第二种情形： $p_1, p_2$  成比例

- 首先注意到此种情况下  $V$  的两列也是成比例的，所以任何投资组合都无法使得在状态 1 时的净支付为正而状态 2 时的净支付为负，或相反
- 因此两个家庭都不能通过在  $t = 0$  时买卖证券在  $t = 1$  的两个状态之间转移资源
- 又由于证券选择  $z_h = (z_{h1}, z_{h2})$  满足市场出清， $z_1 = -z_2$ ，因此均衡时  $z_1, z_2$  的支付总值均为 0
- 于是 RE 均衡可通过分别求解状态 1 和 2 对应的均衡获得
- 可计算唯一的均衡价格分别为  $p_1 = (2/3, 1/3), p_2 = (1/3, 2/3)$ ，与假设矛盾

## 存在性的一般结果

- Radner (1972) 最早给出的存在性结果假设了证券组合  $|y_m|$  必须是有界的；该条件满足时，可以证明家庭的预算约束对应是上半连续的；但这样的界限是人为任意选取的
- Hart (1975) 的例子表明，如果不人为添加这样的上界，那么预算约束集在  $p_1 = p_2 = (1, 1)$  处是非上半连续的，从而消费选择是不连续的，均衡不存在
- 一般情况下，Duffie and Shafer (1985) 证明，给定禀赋集合  $\mathcal{E}$  和商品组合证券集合  $\mathcal{A}$  为开集且效用函数满足一定的光滑条件，则对几乎所有的  $(e, A) \in \mathcal{E} \times \mathcal{A}$ ，RE 均衡都存在
- Cass (1984), Werner (1985), Geanakoplos and Polemarchakis (1986) 在传统的凸假设下对名义证券和计价商品证券证明了均衡的存在性

## 本节内容

- 1 不完全市场均衡理论概述
- 2 均衡的存在性
- 3 均衡的效率**
- 4 均衡的多重性

## Hart 的例子：改变证券结构

- 继续考虑 Hart 的例子只改变证券的支付结构如下：

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 重复之前对两个情形—— $p_1, p_2$  成或不成比例——的讨论，可以计算得到每种情形对应了唯一的 RE 均衡
- 第一种情形的均衡效用： $U_1 = U_2 = 2^{5/2}(\frac{8}{3})^{1/2} + 2(\frac{1}{3})^{1/2}$   
第二种情形： $U'_1 = U'_2 = 2^{3/2}(\frac{62}{21})^{1/2} + (\frac{31}{21})^{1/2} + 2^{3/2}(\frac{32}{21})^{1/2} + (\frac{1}{21})^{1/2}$
- 可验证， $U_1 = U_2 > U'_1 = U'_2$

## 多商品环境下的约束效率的概念

继续假设  $U^h$  不依赖于  $c_0^h$ ;  $t = 0$  时只进行计价商品证券买卖

- 对任一可行证券配置  $y = (y^h)$ , 即满足  $\sum_h y^h = 0$ , 定义  $y$ -均衡为  $\langle p, (x^h)_h \rangle$  满足效用最大化与市场出清, 其中效用最大化对应的预算约束为

$$p_s \cdot x_s \leq p_s \cdot e_s + p_{s1} \sum_{m \in M} a_{sm} y_m.$$

- 一个可行配置  $(x^h, y^h)_h$  称为约束有效的 (constrained efficient), 如果不存在另一个可行证券配置  $\tilde{y}$  及  $\tilde{y}$ -均衡  $\langle \tilde{p}, \tilde{x} \rangle$  使得  $\tilde{x}$  Pareto 优于  $x$

## 约束效率的主要结论

- Geanakoplos and Polemarchakis (1986) 证明, 给定  $K \geq 2$ , 给定  $A$  且  $M < S$ , 在一定的光滑性条件下, 对几乎所有的  $(e, U) \in \mathcal{E} \times \mathcal{U}$ , 其对应的 RE 均衡是约束无效的; 其中  $\mathcal{U}$  表示效用函数  $(U^h)_h$  的一个给定空间
- 引起约束无效的主要原因是价格外部性 (pecuniary externality): 不完全市场下, 证券重新配置不只是直接改变家庭在各个状态下财富, 而且还会通过改变相对价格导致额外的财富转移; 而这些额外的财富转移很有可能是不能通过单纯的证券交易实现的
  - 经典参考文献是 Greenwald and Stiglitz (1986)
- 若只有一个商品, 则约束有效性得到保证, 回到 Diamond (1967) 的经典结果

## 本节内容

- 1 不完全市场均衡理论概述
- 2 均衡的存在性
- 3 均衡的效率
- 4 均衡的多重性**

## 均衡的不定性

- 给定一组参数，如禀赋、效用函数、证券结构等，我们可以计算对应的均衡
- 若均衡不止一个，则称其为不定的 (indeterminate)
- 名义/实际不定性 (nominal/real indeterminacy)
  - 名义不定性：均衡价格  $p$  不止一个
  - 实际不定性：消费配置  $(x^h)_h$  不止一个
- 局部唯一性/不定性 (local uniqueness/indeterminacy)
  - 局部唯一性：每个均衡的小邻域内没有别的均衡
  - 局部不定性：每个均衡的任意小邻域内都有别的均衡

## 均衡不定性的主要结论

给定不完全市场，即  $M < S$ ；以及适当的效用函数光滑性

- 对于实际证券的情形 (计价商品证券和商品组合证券)，对于几乎所有的  $(e, U, A) \in \mathcal{E} \times \mathcal{U} \times \mathcal{A}$ ，均衡配置都是局部唯一的；详见 Geanakoplos and Polemarchakis (1986), Duffie and Shafer (1985)
- 对于名义证券的情形，对于几乎所有的  $(e, U, A) \in \mathcal{E} \times \mathcal{U} \times \mathcal{A}$ ，均衡配置都是局部不定的；更具体的，配置空间中存在一个维数大于等于 1 的子集，使得其中每一点都是给定的  $(e, U, A)$  下的均衡配置；详见 Balasko and Cass (1989), Geanakoplos and Mas-Colell (1989)

## 太阳黑子 (sun spot) 均衡

- 不完全市场情形下还可能发生太阳黑子均衡的现象
- 假设  $H = K = S = 2, M = 0$ ; 两个状态中两个家庭的禀赋和效用都完全一致, 即没有内蕴 (intrinsic) 的不确定性; 这两个状态称为外在的 (extrinsic)
- 假设每个状态的即期市场都有多个均衡, 则选取两个不同的均衡  $p_1 \neq p_2$ , 及相应的均衡配置  $x_1^h \neq x_2^h$
- 所谓太阳黑子均衡是指:  $t = 1$  时, 若所有人都相信外在状态 1 发生, 则市场以  $p_1$  出清; 若所有人都相信外在状态 2 发生, 则市场以  $p_2$  出清
- 光滑交换经济具有 3 个均衡的经典例子见 Shapley and Shubik (1977); 黑子均衡最早在世代交叠模型的研究中被提出, 见 Cass and Shell (1983)

## 光滑交换经济多重均衡的例子: Shapley and Shubik (1977)

两个交易者, John 和 Ivan, 禀赋为 50 美元和 40 卢布, 都需要外汇, 偏好为:

$$u^1(x, y) = y + 110(1 - e^{-x/10})$$

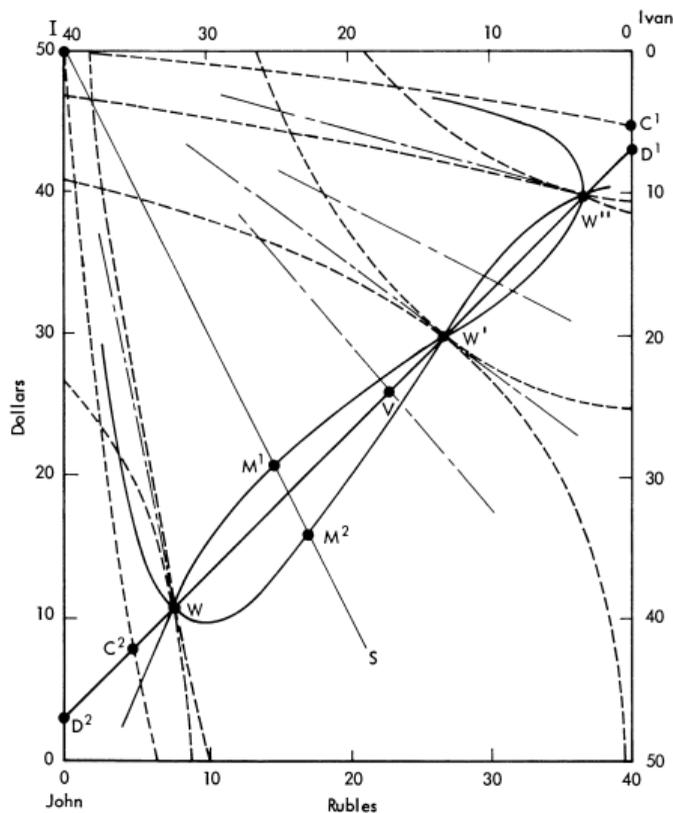
$$u^2(x, y) = x + 100(1 - e^{-y/10})$$

其中  $x$  为卢布,  $y$  为美元;  $p$  为卢布价格 (美元为计价物), 3 个均衡配置 (John)

$$p = 5.07 \quad x = 7.74 \quad y = 10.74$$

$$p = 0.75 \quad x = 26.83 \quad y = 29.82$$

$$p = 0.28 \quad x = 36.78 \quad y = 39.77$$



## 参考文献 I

- AIYAGARI, S. R. (1994): "Uninsured Idiosyncratic Risk and Aggregate Saving," *Quarterly Journal of Economics*, 109, 659–684.
- BALASKO, Y. AND D. CASS (1989): "The Structure of Financial Equilibrium with Exogenous Yields: The Case of Incomplete Markets," *Econometrica*, 57, 135–162.
- CASS, D. (1984): "Equilibrium with Incomplete Financial Market," CARESS working paper, University of Pennsylvania.
- CASS, D. AND K. SHELL (1983): "Do Sunspots Matter?" *Journal of Political Economy*, 91, 193–227.
- DIAMOND, P. A. (1967): "The Role of a Stock Market in a General Equilibrium Model with Technological Uncertainty," *American Economic Review*, 57, 759–776.
- DUFFIE, D. AND W. SHAFER (1985): "Equilibrium in Incomplete Markets: I. A Basic Model of Generic Existence," *Journal of Mathematical Economics*, 14, 285–300.
- GEANAKOPOLOS, J. D. AND A. MAS-COLELL (1989): "Real Indeterminacy with Financial Assets," *Journal of Economic Theory*, 47, 22–38.
- GEANAKOPOLOS, J. D. AND H. M. POLEMARCHAKIS (1986): "Existence, Regularity, and Constrained Suboptimality of Competitive Allocations When the Asset Market Is Incomplete," in *Uncertainty, Information and Communication, Essays in Honor of Kenneth J. Arrow*, ed. by W. P. Heller, R. M. Starr, and D. A. Starrett, Cambridge University Press, vol. 3, chap. 3, 65–95.
- GREENWALD, B. C. AND J. E. STIGLITZ (1986): "Externalities in Economies with Imperfect Information and Incomplete Markets," *Quarterly Journal of Economics*, 101, 229–264.

## 参考文献 II

- HART, O. D. (1975): "On the Optimality of Equilibrium When the Market Structure Is Incomplete," *Journal of Economic Theory*, 11, 418–443.
- HUGGETT, M. (1993): "The Risk-free Rate in Heterogeneous-Agent Incomplete-Insurance Economies," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 17, 953–969.
- KRUSELL, P. AND A. A. SMITH, JR. (1998): "Income and Wealth Heterogeneity in the Macroeconomy," *Journal of Political Economy*, 106, 867–896.
- MAGILL, M. AND M. QUINZII (1996): *Theory of Incomplete Markets*, Cambridge: The MIT Press.
- RADNER, R. (1972): "Existence of Equilibrium of Plans, Prices, and Price Expectations in a Sequence of Markets," *Econometrica*, 40, 289–303.
- RÍOS-RULL, J.-V. (1995): "Models with Heterogeneous Agents," in *Frontiers of Business Cycle Research*, ed. by T. F. Cooley, Princeton, NJ: Princeton University Press, chap. 3, 98–125.
- SHAPLEY, L. S. AND M. SHUBIK (1977): "An Example of a Trading Economy with Three Competitive Equilibria," *Journal of Political Economy*, 85, 873–875.
- WERNER, J. (1985): "Equilibrium in Economies with Incomplete Financial Markets," *Journal of Economic Theory*, 36, 110–119.
- (1990): "Structure of Financial Markets and Real Indeterminacy of Equilibria," *Journal of Mathematical Economics*, 19, 217–232.