高级微观经济学

第 1 讲：消费者及厂商理论

授课人：刘岩

武汉大学经管学院金融系

2023 年 9 月 19 日

本讲内容

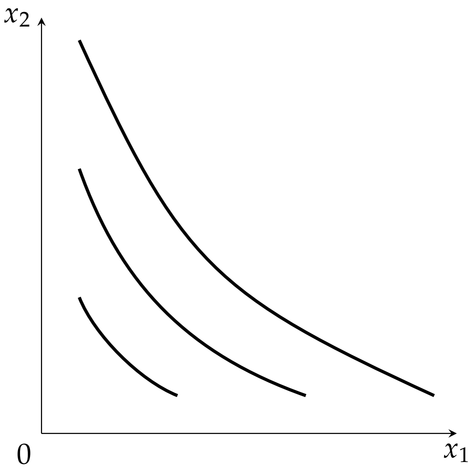
1. 消费者偏好与效用函数
2. 经典企业理论

本节内容

消费者偏好

- 商品空间 $X \subset \mathbb{R}_+^K$：通常直接取做 $\mathbb{R}_+^K$
- 商品空间中的一点 $x \in X$ 称为消费束 (consumption bundle)，或消费组合 (consumption portfolio)
- 偏好 $\succsim$：X 上的一个二元全序关系，满足
  1. 完全性——对任意的 $x, y \in X$，$x \succsim y$ 或者 $y \succsim x$;
  2. 反身性——对任意的 $x \in X, x \succsim x$;
  3. 传递性——对任意的 $x, y, z \in X$, 若 $x \succsim y$，$y \succsim z$，则 $x \succsim z$
- 进一步地，可定义
  1. $x \precsim y$，若 $y \succsim x$;
  2. $x = y$，若 $x \succsim y$ 且 $y \succsim x$;
  3. $x \succ y$，若 $x \succsim y$ 且 $y \not\succsim x$

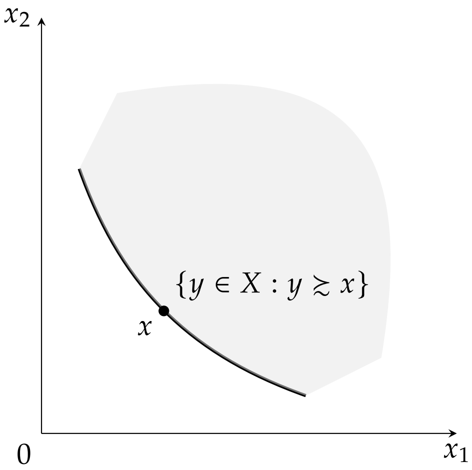
偏好的图形表示：无差异曲线 (indifferent curve) 簇



偏好的性质

- 连续性：对任意的 $x \in X$，$\{y \in X : y \succsim x\}$ 和 $\{y \in X : y \precsim x\}$ 都是 X 中的闭集
  - 其中，$\{y \in X : y \succsim x\}$ 称为关于 x 的上轮廓集 (upper contour set)，$\{y \in X : y \sim x\}$ 称为 x 的无差异集 (indifferent set)
- 单调性：若 $x \geq y$，则 $x \succsim y$；且若 $x \gg y$，则 $x \succ y$
  - 此时 x 的无差异集为曲线，不存在“内部”区域
- 凸性：X 是凸集；若 $x, y \succsim z$，则对任意的 $\alpha \in [0,1]$，有 $\alpha x + (1-\alpha)y \succsim z$
  - 此时 x 的上轮廓集为凸集

偏好的图形表示：无差异曲线与上轮廓集



偏好的效用函数表示与性质

以效用函数表示偏好

- 若有 $U : X \to \mathbb{R}$ 满足 $x \succsim y$ 当且仅当 $U(x) \geq U(y)$，则称 U 为 $\succsim$ 的一个表示

效用函数的性质

- 给定偏好 $\succsim$，若 U 是 $\succsim$ 的表示，则对于任意的单调递增函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$f \circ U : x \mapsto f(U(x))$ 也是 $\succsim$ 的表示
    - 同一个偏好，可以有多种效用函数表示
- 若 $\succsim$ 是凸的，则 $\succsim$ 的任一表示 U 是拟凹 (quasi-concave) 函数
    - 拟凹函数：上轮廓集为凸集的函数
- 若 $\succsim$ 是单调的，则 $\succsim$ 的任一表示 U 满足：$U(x) \geq U(y)$，若 $x \geq y$；且 $U(x) > U(y)$，若 $x \gg y$

效用函数示例

考虑 $X = \mathbb{R}_+^2$ 上的效用函数 $U(x) = x_1^\alpha x_2^\beta$，$\alpha, \beta > 0$

- 对任意的 $\alpha, \beta > 0$，$U(x)$ 均为拟凹函数：对任意消费组合 z 及所对应的效用水平 $\bar{u} = U(z)$，上轮廓集为 $\left\{x : x_1^\alpha x_2^\beta \geq \bar{u}\right\}$，等价于

$$x_2 \geq \left(\frac{\bar{u}}{x_1^\alpha}\right)^{1/\beta}$$

- 当 $\alpha + \beta < 1$ 时，U 严格凹；当 $\alpha + \beta = 1$ 时，U 凹；当 $\alpha + \beta > 1$ 时，U 仅为拟凹函数
  - 注意，所有凹函数都是拟凹函数
- 对任意的 $\alpha, \beta > 0$，$U(x)$ 均为严格增效用函数

偏好的效用表示定理

定理 1 (Debreu, 1954)

若 X 上的偏好 $\succsim$ 是连续的，则存在连续函数 $U: X \to \mathbb{R}$ 使得 U 是 $\succsim$ 的效用函数表示

注 1 Rubinstein 第二章证明了一个较弱的结论，即连续偏好有效用函数表示（但该效用函数不一定连续）；MWG、Kreps 和 JR 中均在额外假设偏好单调的情形下给出了证明

注 2 若偏好不连续，则可能不存在效用函数表示；见 Rubinstein 第二章中字典序 (lexicographic) 偏好的例子

- $\mathbb{R}^2_+$ 上的字典序偏好定义如下：$x = (x_1, x_2) \succ y = (y_1, y_2)$ 当且仅当 $x_1 > y_1$，或 $x_1 = y_1$ 且 $x_2 > y_2$

消费者最优化问题

- 给定商品空间 $X = \mathbb{R}_+^K$ 及（相对）价格系统 $p \in \mathbb{R}_+^K \setminus \{0\}$，注意 $p \neq 0 = (0, \ldots, 0)$
- 给定消费者的偏好（假设其连续）及相应的效用函数表示 $U : X \to \mathbb{R}$；给定该消费者的禀赋 (endowment) 向量 $e \in \mathbb{R}_+^K$
- 消费者的预算约束 (budget constraint) 集合为：

$$B(p, e) = \{x \in X : \underbrace{p \cdot x}_{\text{总支出}} \leq \underbrace{p \cdot e}_{\text{总收入}}\}.$$

- 消费者效用最优化问题为：$\max_{x \in B(p,e)} U(x)$
- 该问题的解（当存在时），$D(p, e) = \operatorname{argmax}_{x \in B(p,e)} U(x)$，称为需求对应 (demand correspondence)

消费者最优化问题的几个性质

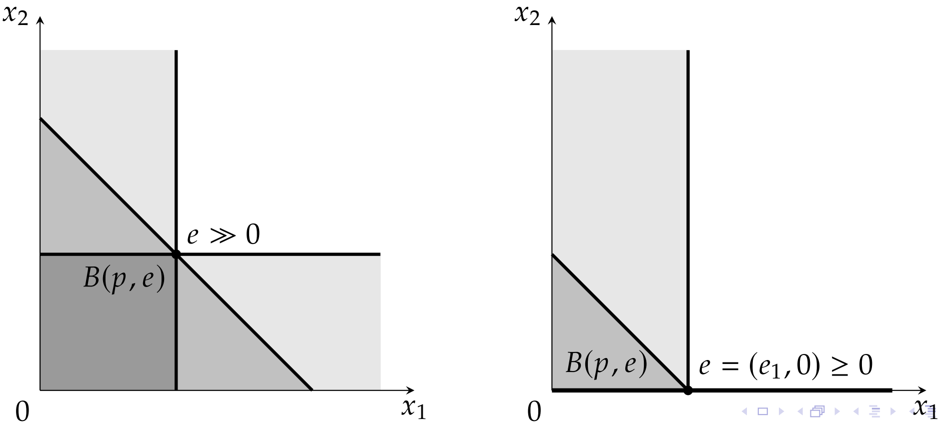
- 齐次性：任取 $\alpha > 0$，由 $B(p,e) = B(\alpha p,e)$ 知 $D(p,e) = D(\alpha p,e)$
- 可取标准化价格空间：$\Delta^K = \{p \in \mathbb{R}^K_+ : \sum_k p_k = 1\}$，即 $K-1$ 维单纯形 (simplex)
- 把 $B(p,e)$ 视作对应 $\Delta^K \rightrightarrows X$，称为预算约束对应，若 $e \gg 0$，则 $B(\cdot,e)$ 连续
  - 当 $e = (e_1,\ldots,e_K) \geq 0$ 且存在 $e_k = 0$ 时，$B(\cdot,e)$ 不是下半连续
- 若 U 是拟凹函数，则 $D(p,e)$ 是凸集
- 注意，$D(p,e)$ 和 Marshall 需求对应不一样，后者所对应的预算集合为

$$B(p,w) = \{x \in X : p \cdot x \leq w\},$$

其中 $w > 0$ 为收入；该需求对应又称为 Walras 需求对应

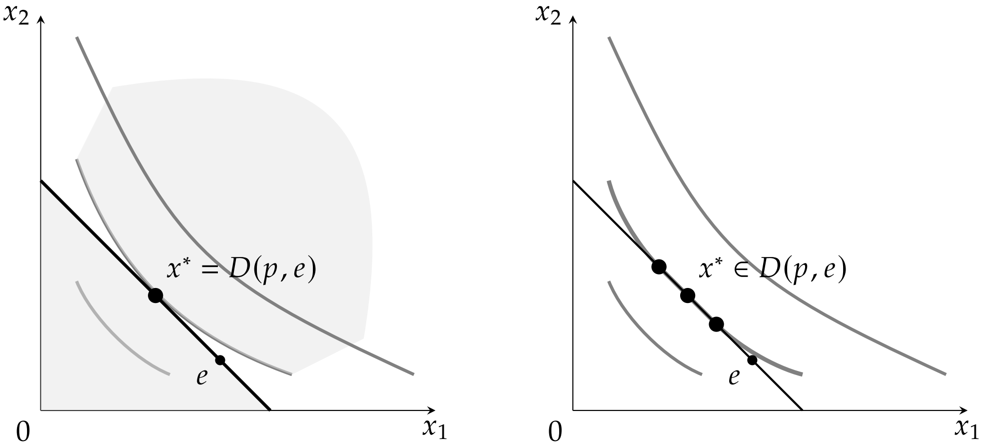
预算约束对应的连续性：$e \gg 0$ 与 $e \geq 0$，$p = (1,0),(0.5,0.5),(0,1) \in \Delta^2$

当 $e \gg 0$ 时，$B(p,e)$ 关于 p 连续；当 $e_1 > 0$ 且 $e_2 = 0$ 时，$B(p,e)$ 在 $p = (0,1)$ 处不是下半连续：$p_1 = 0$ 时，e 右侧点属于 $B(p,e)$，但 $p_1 > 0$ 时，e 右侧点不属于 $B(p,e)$



效用最大化图示：严格拟凹与拟凹效用

严格拟凹效用（左）有唯一最优消费组合；拟凹效用（右）可有多重最优消费组合



需求对应与需求函数

- 预算约束对应 $B(p,e)$ 取值一定为凸集；当 $B(p,e)$ 关于 p 连续，$B(p,e)$ 为紧集，且效用函数 $U(x)$ 连续时，由 Berge 最大值定理可知，需求对应

$$D(p,e)=\operatorname*{argmax}_{x\in B(p,e)} U(x)$$

为上半连续

- 进一步，当 $U(x)$ 为严格拟凹函数时，$D(p,e)$ 为单点集，故为一个函数；而 $D(p,e)$ 作为对应的上半连续性意味着其作为函数是连续的
  - 由上半连续性可知，任意 $(p^n,x^n)\to(p,x)$ 且 $x^n\in D(p^n,e)$，则 $x\in D(p,e)$；又由 $D(p,e)$ 为单点集可知，前述 $\in$ 可换为 $=$，故满足连续函数的定义

连续可微效用函数下的效用最大化

- 假设 $U: X \to \mathbb{R}$ 连续可微，严格递增且为严格拟凹函数
  - 在偏好层面很难定义可微性，这凸显了效用函数作为一个理论工具的便利
- 假设 $e \gg 0$ 且 $p \in \Delta^K, p \gg 0$，即排除预算约束对应不连续的情况，则效用最大化问题

$$\max U(x) \qquad \text{s.t.} \qquad p \cdot x \leq p \cdot e,\ x \in X$$

  可通过 Lagrange 乘子法求解
- 假设 $X = \mathbb{R}_+^K$，则 $x \in X$ 等价于 $x_k \geq 0, k = 1, \ldots, K$，定义 Lagrange 函数

$$L(x; \lambda, \phi) = U(x) - \lambda(p \cdot x - p \cdot e) - \phi_1(-x_1) - \cdots - \phi_K(-x_K)$$

  按照常规，约束条件写为 $G(x) \leq 0$ 的形式时，乘子项写为 $-\gamma G(x)$ 的形式

Lagrange 乘子法与一阶最优条件

- 给定 $U(x)$ 严格拟凹，预算约束集为凸集，前述效用最大化问题为凸优化问题，此时 Lagrange 函数（英文写为 Lagrangian）的一阶最优化条件既是充分条件，也是必要条件
- 该一阶条件分为两组，在最优解 $(x^*;\lambda^*,\phi^*)$ 处：

$$\frac{\partial L(x^*;\lambda^*,\phi^*)}{\partial x_k} = \frac{\partial U(x^*)}{\partial x_k} - \lambda^* p_k + \phi_k^* = 0, \quad \forall k = 1,\ldots,K \tag{FOC}$$

$$\lambda^*(p\cdot x^* - p\cdot e) = 0, \qquad \phi_k^*(-x_k^*) = 0, \quad \forall k = 1,\ldots,K \tag{CS}$$

  其中 (FOC) 称为关于选择变量 x 的一阶条件，(CS) 称为关于约束的互补松弛条件 (complementary slackness condition)
- 当乘子取值不为 0 时，对应的不等式约束取等号，此时称该约束为紧约束 (binding constraint)

角点解、内点解与 Inada 条件

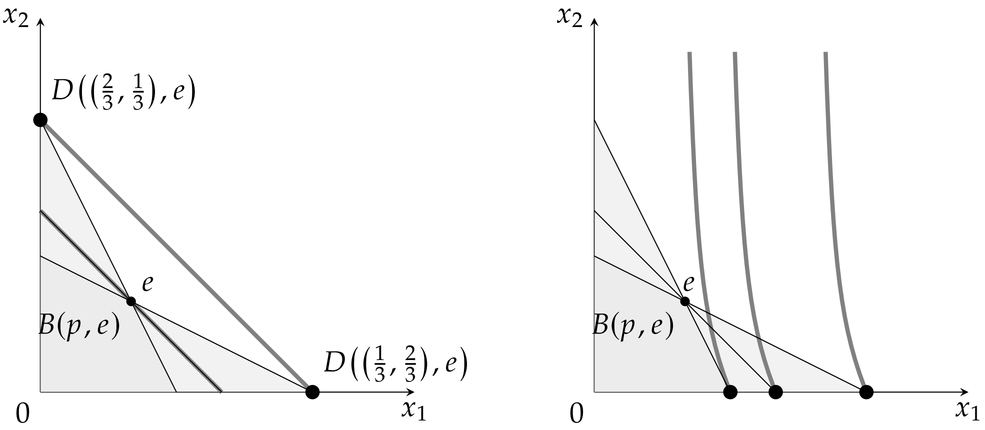
- 当商品空间 $\mathbb{R}_+^K$ 对应的约束 $x_k \geq 0$ 为紧约束时，最优化解出现角点解 (corner solution)，若此类约束不是紧约束，则称最优解为内点解 (interior solution)
  - 对一般的选择空间 (choice space) 而言，如果空间本身对应的约束在最优化问题中为紧约束，则称其为角点解；而预算约束这类约束，反映的是经济约束，该类约束通常为紧约束（否则不需要考虑这些经济约束），但不称对应解为角点解
- 建模分析通常希望避免出现角点解，因此一般会对目标函数进行额外假设，以消除角点解对应的紧约束
- 最常见假设为 Inada 条件（中文翻译为“稻田”条件），在效用函数的例子中，对应如下假设：

$$\lim_{x_k \searrow 0} \frac{\partial U(x)}{\partial x_k} = +\infty, \quad \forall k = 1, \ldots, K$$

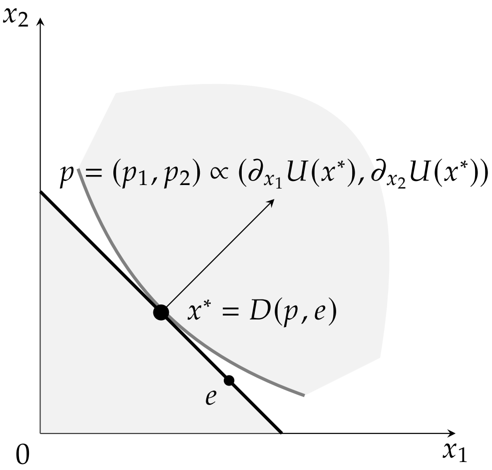
此时 $x_k = 0$ 不会成为最优解，因不存在有限值乘子使得 (FOC) 条件成立

角点解示例：$p = (2/3, 1/3), (1/2, 1/2), (1/3, 2/3)$

左图：$U(x) = x_1 + x_2$；右图：$U(x) = x_1 + \sqrt{x_2 + a}$，$a$ 足够大



连续可微情形效用最大化内点解一阶条件示例



无差异曲线与预算约束相切于最优消费组合 x^*，此点处无差异曲线的斜率等于预算约束线的斜率：

$$-\frac{p_1}{p_2} = -\frac{\partial_{x_1} U(x^*)}{\partial_{x_2} U(x^*)}$$

这也是 19 世纪末经济学边际革命的核心贡献：价格正比于边际效用

显示偏好原理

- 消费者偏好理论的一个经典结论是显示偏好原理 (law of revealed preference)
- 给定预算约束集 B，以 $D(B)$ 表示偏好 $\succsim$ 下的最优消费组合（可以是集合），则有如下结论：(i) 若 $y \in B, x \in D(B)$，则 $x \succsim y$；(ii) 若 $x \in D(B)$ 且消费空间中有 $y \succ x$，则 $y \notin B$
- 第一个结论的解释：消费者一定选择买得起的组合里最好的消费组合
- 第二个结论的解释：消费者更喜欢而又没选择的消费组合，一定是买不起的
- 推论：存在即合理——决策者所选的，一定是其约束集里最好的；决策者没选而又想选的，一定不在其约束集里

Marshall 需求函数

- 假设偏好可由严格拟凹、严格单调、满足 Inada 条件的可微效用函数 $U(x)$ 表示
- 给定名义价格 $p \in \mathbb{R}_{+}^{K} \setminus \{0\}$ 以及名义收入总额 w，Marshall 需求函数为如下问题的解：

$$x^*(p, w) = \operatorname{argmax} U(x) \qquad \text{s.t.} \qquad p \cdot x \leq w$$

  相应的 Lagrange 函数为 $L(x, \lambda) = U(x) - \lambda(p \cdot x - w)$

- 将 $x^*(p, w)$ 简写为 x^*，对应的最优化相应的最优化一阶条件为

$$\frac{\partial U(x^*)}{\partial x_k} = \lambda^* p_k,\ k = 1, \ldots, K, \quad \text{以及} \quad p \cdot x^* = w$$

- 接下来，假设 $x^*(p, w)$ 关于所有变量连续可微
  - 由隐函数定理可知，$x^*(p, w)$ 的可微性取决于 $U(x)$ 的二阶导

间接效用函数及若干性质

- 延续前页假设，定义间接效用函数 $V(p,w)=U(x^*(p,w))$
- 间接效用函数满足 0-次齐次性：$\forall\alpha>0$，$V(\alpha p,\alpha w)=V(p,w)$
- λ^* 的经济含义：利用链式法则可知

$$\frac{\partial V(p,w)}{\partial w}=\frac{\partial U(x^*(p,w))}{\partial w}=\sum_{k=1}^{K}\frac{\partial U(x^*(p,w))}{\partial x_k}\frac{\mathrm{d}x_k^*(p,w)}{\mathrm{d}w}=\sum_{k=1}^{K}\lambda^* p_k\frac{\mathrm{d}x_k^*(p,w)}{\mathrm{d}w}$$

而由 $p\cdot x^*(p,w)=w$ 两端对 w 求导可得 $\sum_{k=1}^{K}p_k\frac{\mathrm{d}x_k^*(p,w)}{\mathrm{d}w}=1$，代入上式得到

$$\frac{\partial V(p,w)}{\partial w}=\frac{\partial U(x^*(p,w))}{\partial w}=\lambda^*$$

由此可知，收入（财富）对边际效用的作用等于 λ^*，故又称 λ^* 为收入（财富）的影子价格 (shadow price)

Marshall 需求函数示例：Cobb-Douglas 效用函数

考虑 $U(x) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$，$\alpha \in (0,1)$，易验证其满足 Inada 条件，故在预算约束 $p \cdot x = p_1 x_1 + p_2 x_2 \le w$ 下的效用最大化问题有如下 Lagrange 函数

$$L(x;\lambda) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - w)$$

对应一阶条件为

$$\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} = \lambda p_1, \quad (1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha} = \lambda p_2, \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = w$$

由前两式可得 $\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \alpha p_2 x_2 = (1-\alpha) p_1 x_1$，结合第 3 式得

$$x_1^* = \frac{\alpha w}{p_1}, \quad x_2^* = \frac{(1-\alpha) w}{p_2}$$

Marshall 需求函数示例：Cobb-Douglas 效用函数

- 当联系上下文含义明确时，需求函数 $x^*(p,w)$ 也可以简记为 $x(p,w)$
- 商品 $k,\ell = 1,\dots,K$ 间的替代弹性 (elasticity of substitution) 定义为

$$\varepsilon_{kl}(p,w) = -\frac{\partial\left(\frac{x_k(p,w)}{x_\ell(p,w)}\right)}{\partial\left(\frac{p_k}{p_\ell}\right)}\frac{\frac{p_k}{p_\ell}}{\frac{x_k(p,w)}{x_\ell(p,w)}} = -\frac{\partial\ln\left(\frac{x_k(p,w)}{x_\ell(p,w)}\right)}{\partial\ln\left(\frac{p_k}{p_\ell}\right)}$$

  表示 k 与 ℓ 相对价格变动 1% 时两者相对需求变动的百分比
- 对于 Cobb-Douglas (CD) 效用，由于 $x_1(p,w)/x_2(p,w) = (p_2/p_1)[\alpha/(1-\alpha)]$，故 $\ln[x_1(p,w)/x_2(p,w)] = -\ln[p_1/p_2] + \ln[\alpha/(1-\alpha)]$，由此可知对于 CD 效用

$$\varepsilon_{12} = -\partial\ln\left(\frac{x_1(p,w)}{x_2(p,w)}\right)\Big/\partial\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = 1$$

  即 CD 函数的替代弹性为常数 1

Marshall 需求函数示例：Cobb-Douglas 效用函数

- CD 效用对应的需求函数满足

$$p_1x_1(p,w) = \alpha w, \quad p_2x_2(p,w) = (1-\alpha)w$$

  即最优消费组合中，每个商品的支出占总收入的比例与效用函数中的份额或效用弹性一致

  - 消费 k 的效用弹性定义为 $\partial \ln U / \partial \ln x_k$

- 上述性质对 $\mathbb{R}_+^K$ 上的 CD 函数同样成立：$U(x) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_K^{\alpha_K}$，其中 $\alpha_k > 0, k = 1, \ldots, K$ 且 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_K = 1$，相应的需求函数满足

$$p_kx_k(p,w) = \alpha_k w, \quad k = 1, \ldots, K$$

Marshall 需求函数示例：Cobb-Douglas 效用函数

- 利用上述性质，很容易求解下述无穷期消费者效用最大化问题：$\beta \in (0,1)$

$$\max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t \quad \text{s.t.} \quad \sum_{t=0}^{\infty} p_t c_t \leq w$$

  - 假设上述无穷求和收敛；形如 $\alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2 = \ln x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ 的效用函数，与 $x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ 相差对数变换，偏好保持不变，最优解具有同样性质
- 首先注意到上述效用函数等价于 $(1-\beta)\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t$，且此时 c_t 的效用份额为 $(1-\beta)\beta^t$，满足 $(1-\beta)\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t = 1$，故此时效用函数为一次齐次的 CD 效用
- 其次，对调整参数后的 CD 效用求最优解可得

$$p_t c_t = (1-\beta)\beta^t w, \quad t = 0, \ldots, \infty$$

特别的，若 $p_t = (1-\beta)\beta^t$，$c_t = w$，$t = 0, \ldots, \infty$

本节内容

生产技术的描述

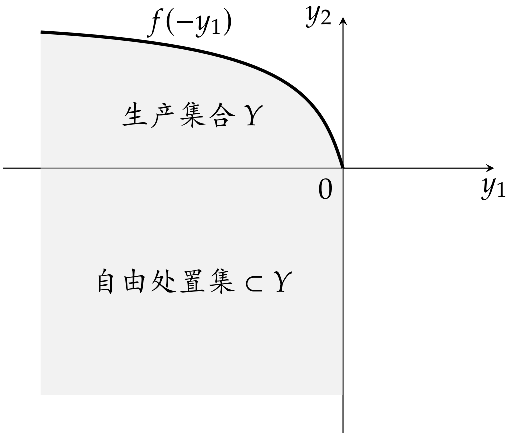
生产集合

- 企业的生产计划 (production plan) 由 $\mathbb{R}^K$ 中的点 y 表示
- y 的负坐标对应投入品，正坐标对应产出品
- 企业的生产集合 (production set) 记为 Y
- 这种描述方法比生产函数的方法更一般

通常假设单个企业的 Y 满足：

- $Y \cap \mathbb{R}^K_+ = \{0\}$——不能无中生有
- Y 是闭凸集
- $Y + \mathbb{R}^K_- \subset Y$——实质是可自由处置 (free disposal) 任何多余产品

生产集合图示



$y_1 < 0$ 表示生产要素投入，$y_2 > 0$ 表示产出，生产集合的边界称为技术前沿 (technology frontier)，用生产函数 $y_2 = f(-y_1)$ 表示

企业目标和所有权结构

完全竞争下企业利润最大化

- 给定价格系统 $p \in \Delta$，企业利润为 $\pi(y) = p \cdot y$
- 企业利润最大化：$\max_{y \in Y} \pi(y) = \max_{y \in Y} p \cdot y$

所有权结构与利润分配

- 假设经济中 H 个家庭共同拥有一个企业
- 每个家庭享有 $\theta^h \in [0, 1]$ 的权益，$\sum_h \theta^h = 1$
- 每个家庭的分配到的利润为 $\theta^h p \cdot y$

最优生产计划函数与最优利润函数

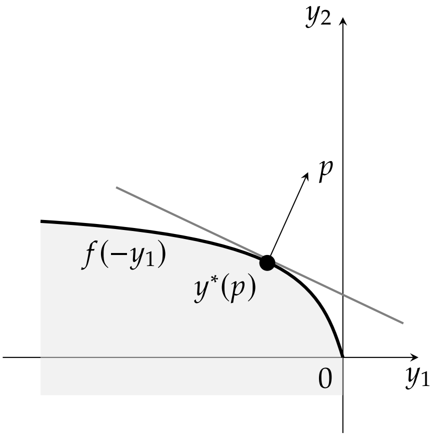
- 为了得到最优生产计划 $y^* = \text{argmax}_{y\in Y}\, p\cdot y$ 内点解，通常做如下假设：价格向量 $p \gg 0$，技术前沿即生产函数 $f(\cdot)$ 连续可微、严格凹且在 0 点处满足下述 Inada 条件

$$\lim_{y_i \nearrow 0} \partial_{y_i} f(\ldots, -y_i, \ldots) = +\infty, \quad \text{对任意要素投入} y_i \le 0$$

- 在此条件下得到最优生产计划函数 $y^*(p)$，并定义最优利润函数为

$$\pi^*(p) = \pi(y^*(p)) = p \cdot y^*(p)$$

利润最大化图示



Cobb-Douglas 生产函数

- 最常用的生产函数为 Cobb-Douglas 生产函数：1 个产出品，N 个投入品

$$y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_N) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_N > 0, \alpha_1 + \cdots + \alpha_N = 1$$

- 假设产品为计价物 (numeraire)，价格为 1，投入品价格为 $p = (p_1, \ldots, p_N)$，则利润函数可写为

$$\pi(x) = f(x) - p \cdot x$$

- 利润最大化问题 $\max_{x \geq 0} \pi(x)$ 的一阶条件为

$$\partial_{x_i} f(x) = \alpha_i x_1^{\alpha_1} \cdots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_i^{\alpha_i - 1} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \cdots x_N^{\alpha_N} = p_i, \quad i = 1, \ldots, N$$

即边际产出等于要素价格

一次齐次生产函数与要素分配

- 对前页 CD 生产函数，易验证在最优生产决策 x 处有 $\sum_{i=1}^{N} p_i x_i = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f(x) = f(x)$，故最优利润 $\pi^* = 0$，即所有生产要素的成本等于产出，换言之产出完全分配给各个生产要素
  - 对 CD 生产函数，要素 i 获得的分配份额正好等于 α_i
- 上述最优利润为 0 的性质对一次齐次生产函数 $f(x)$ 均成立：$\forall \gamma \in \mathbb{R}_{++}$，$f(\gamma x) = \gamma f(x)$，两端对 γ 求导可得

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \partial_{x_i} f(\gamma x) = f(x)$$

再令 $\gamma = 1$ 可得 $\sum_{i=1}^{N} x_i \partial_{x_i} f(x) = f(x)$，又由最优生产决策可知 $\partial_{x_i} f(x) = p_i$，故

$$p_1 x_1 + \cdots p_N x_N = f(x) \Leftrightarrow \pi^*(p) = 0$$