高级微观经济学

第 0 讲：数学基础提要

授课人：刘岩

武汉大学经管学院金融系

2023 年 9 月 12 日

本讲内容

1. 欧式空间的基本性质
2. 多元函数、约束最优化与凸性
3. 对应与不动点定理

本节内容

基本记号

关于集合

- $x \in X$，$X \subset Y$，X^c，$\varnothing$：空集
- $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$：集合列的并，$\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$：集合列的交，$n = 1, \ldots, \infty$

关于欧式空间

- $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$：实线（实数集合）
- $\mathbb{R}^k = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$：$k$ 维欧式空间，k 为正整数
- $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$：$\mathbb{R}^k$ 中一点（向量）

$\mathbb{R}^k$ 的线性代数结构

$\mathbb{R}^k$ 是一个线性空间

- $0 = (0, \ldots, 0)$：$\mathbb{R}^k$ 的原点（零向量）
- $\mathbb{R}^k$ 中的加法：$x = (x_1, \ldots, x_k), y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$，

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_k + y_k) \in \mathbb{R}^k$$

- $\mathbb{R}^k$ 中的数乘：$x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$，$\alpha \in \mathbb{R}$，

$$\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_k) \in \mathbb{R}^k$$

- $-x = (-x_1, \ldots, -x_k)$，$x - y = x + (-y)$，$x - x = 0$

$\mathbb{R}^k$ 上的内积和模

$\mathbb{R}^k$ 上的内积

- 对 $\mathbb{R}^k$ 中的任意两点 x, y，定义 $x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_k y_k$，称为 x 和 y 的内积
- 内积是一个对称双线性函数：$x \cdot y = y \cdot x$，$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$，$(\alpha x) \cdot y = \alpha x \cdot y$，$\alpha \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^k$ 上的（欧式）模

- 定义 $||x|| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}$，称为 x 的欧式模
- 三角不等式：$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

$\mathbb{R}^k$ 中的一种（偏）序结构

基本记号

- $x \geq y$：$x_i \geq y_i$，对所有 i
- $x > y$：$x \geq y$，且对至少一个 i 有 $x_i > y_i$
- $x \gg y$：$x_i > y_i$，对所有 i
- $\mathbb{R}^k_+ = \{x \in \mathbb{R}^k : x \geq 0\}$，$\mathbb{R}^k_- = \{x \in \mathbb{R}^k : x \leq 0\}$
- $\mathbb{R}^k_{++} = \{x \in \mathbb{R}^k : x \gg 0\}$，$\mathbb{R}^k_{--} = \{x \in \mathbb{R}^k : x \ll 0\}$

$\geq$ 在 $\mathbb{R}^k$ 中定义了一个（二元）序关系

- 一般地，$(\mathbb{R}^k, \geq)$ 是偏序集：不是任意两个点都能比大小
- 特别地，$(\mathbb{R}, \geq)$ 是全序集：任意两个数可以比大小

$\mathbb{R}^k$ 中的开集

$\mathbb{R}^k$ 中的开球

- 给定 $\mathbb{R}^k$ 中的任意一点 x，对任意一个正数 $\epsilon > 0$，定义

$$B(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^k : ||y - x|| < \epsilon\},$$

  称作以 x 为中心、ϵ 为半径的开球

- $B(x, \epsilon)$ 的边界，$\{y \in \mathbb{R}^k : ||y - x|| = \epsilon\}$，不属于 $B(x, \epsilon)$

开集的定义

- 给定 $\mathbb{R}^k$ 的子集 X，若对 X 中的任意一点 x，都存在 $\epsilon > 0$，使得 $B(x, \epsilon) \subset X$，则称 X 为开集

$\mathbb{R}^k$ 中的闭集

闭集的定义

- 给定 $\mathbb{R}^k$ 的子集 X，若 X^c 为开集，则称 X 为闭集
- 直观地说，闭集包含其边界
- 特别地，$\mathbb{R}^k$ 和 $\varnothing$ 既是开集又是闭集

一个重要性质——给定一列集合 $\{X_n \subset \mathbb{R}^k : n = 1, 2, \ldots, \}$:

- 若所有的 X_n 都是开集，则 $\bigcup_n X_n$ 也是开集，
- 若所有的 X_n 都是闭集，则 $\bigcap_n X_n$ 也是闭集

$\mathbb{R}^k$ 中的极限

$\mathbb{R}^k$ 上的（欧式）距离

- 对于 $\mathbb{R}^k$ 中的两点 x, y，定义其距离为 $||x-y||$，即向量差的欧式模

$\mathbb{R}^k$ 中点列的极限

- 给定 $\mathbb{R}^k$ 中点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 及点 x，若对于任意的正数 $\epsilon > 0$，都存在正整数 N，使得不等式

$$||x_n - x|| < \epsilon$$

  对任意 $n > N$ 成立，则称 x 为 $\{x_n\}$ 的极限，记作 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

闭集与点列的收敛性

点列的收敛性

- 给定点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，若存在点 x，使得 $\{x_n\}$ 以 x 为极限，则称 $\{x_n\}$ 收敛，否则称其发散

闭集的一个重要性质

- 若 X 为闭集，$\{x_n\} \subset X$ 收敛，则 $\lim_n x_n \in X$，换言之，X 中任一收敛点列的极限也属于 X
- 逆命题也成立：给定 $X \subset \mathbb{R}^k$，若 X 中任一收敛点列的极限也属于 X，则 X 是闭集

$\mathbb{R}^k$ 中的紧集

紧集的定义

- $\mathbb{R}^k$ 中的有界闭集称为紧集

紧集的重要性质

- 若 X 为紧集，则 X 中的任意点列均有收敛子列
- 逆命题也成立：给定 X，若其中任意点列均有收敛子列且极限也属于 X，则 X 是紧集

点列收敛的条件

$\mathbb{R}^k$ 中的 Cauchy 列

- 给定 $\{x_n\}$，若对任意的 $\epsilon > 0$，存在 N，使得

$$||x_n - x_m|| < \epsilon$$

  对任意的 $n, m > N$ 成立，则称 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列

- 点列收敛当且仅当其为 Cauchy 列

$\mathbb{R}$ 中的单调列

- $\mathbb{R}$ 中的有界单调列是 Cauchy 列，故收敛

$\mathbb{R}$ 中点集的上、下确界

定义

- 给定 $\mathbb{R}$ 中的一个非空集合 X
- X 的最小上界称为上确界，记为 $\sup X$
- X 的最大下界称为下确界，记为 $\inf X$
- 若 X 无上界，则约定 $\sup X = \infty$，若无下界，则 $\inf X = -\infty$

性质

- 若 X 有上界，则 $\sup X$ 存在且有限
- 若 X 有下界，则 $\inf X$ 存在且有限

本节内容

连续函数

定义

- 给定 $D \subset \mathbb{R}^k$ 以及其上的函数 $f : D \to \mathbb{R}$
- 给定点 $x \in D$，若对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

  对任一 $y \in D \cap B(x, \delta)$ 成立，则称 f 在 x 处连续
- 若 f 在 D 中每一点连续，则称其为（D 上的）连续函数

基本性质

- 若 $f : D \to \mathbb{R}$ 连续，$\{x_n\} \subset D$ 收敛且极限 $x_0 \in D$，则 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

函数值域的上、下确界

- 给定 $f: D \to \mathbb{R}$，$\{f(x): x \in D\}$ 称为 f 的值域
- f 值域的上、下确界分别简记为 $\sup_{x\in D} f(x), \inf_{x\in D} f(x)$
- 若 f 有界，则其上、下确界均有限
- 若存在 $x_0 \in D$ 使得 $f(x_0) = \sup_x f(x)$，则称 $\sup_x f(x)$ 为 f 的 最大值，记为 $\max_x f(x)$
- 若存在 $x_1 \in D$ 使得 $f(x_1) = \inf_x f(x)$，则称 $\inf_x f(x)$ 为 f 的 最小值，记为 $\min_x f(x)$

紧集上的连续函数

定理 1 (Weierstrass)

若 $D \subset \mathbb{R}^k$ 为紧集，$f : D \to \mathbb{R}$ 连续，则

1. f 有界，$\sup_x f(x), \inf_x f(x)$ 存在且有限
2. 存在 $x_0, x_1 \in D$ 使得

$$f(x_0) = \sup_{x\in D} f(x) \qquad f(x_1) = \inf_{x\in D} f(x)$$

亦即 f 在 D 上能取到最大值、最小值，记作 $f(x_0) = \max_{x\in D} f(x)$，$f(x_1) = \min_{x\in D} f(x)$

约束最优化的一般形式

- 给定目标函数 $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$
- 及 ℓ 个（不等式）约束 $g_i(x) \le 0$，$i = 1, \ldots, \ell$，定义约束集

$$C = \{x \in D : g_i(x) \le 0, i = 1, \ldots, \ell\}.$$

- 对应的约束最优化问题记作：

$$\sup_{x \in C} f(x) \quad \text{或} \quad \sup f(x) \text{ s.t. } g_i(x) \le 0,\ i = 1, \ldots, \ell.$$

- 通常而言，C 是紧集而 f 连续，故上述最优化问题有解，因此也直接写作 $\max_{x \in C} f(x)$

凸性

- 给定 $X \subset \mathbb{R}^k$，若对于任意的 $x, y \in X$ 及 $0 \leq \alpha \leq 1$，有 $\alpha x + (1-\alpha)y \in X$，则称 X 为凸集
- 凸集簇的任意交还是凸集
- 给定凸集 $D \subset \mathbb{R}^k$ 及 $f : D \to \mathbb{R}$，若对于任意的 $x, y \in D$ 及 $0 \leq \alpha \leq 1$，有

$$\alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \leq f(\alpha x + (1-\alpha) y),$$

  则称 f 为凹（或上凸）函数；若上式中 $<$ 成立，则称其为严格凹函数
- 若上述定义中的不等号方向相反，则称为（严格）凸函数

凹函数的性质

- 凹函数是连续函数
- 若 f 为紧致凸集 D 上的凹函数，则其局部最大值为全局最大值
- 若 f 为紧致凸集 D 上的严格凹函数，则其存在唯一的 $x_0 \in D$ 使得 $f(x_0) = \max_x f(x)$
- 若 f 二阶连续可微，则 f 是凹函数等价于 f 的 Hessian 矩阵半负定，f 是严格凹函数等价于 f 的 Hessian 矩阵负定
  - 若 $f(x)$ 是一元函数，则其为凹函数等价于 $f''(x) \leq 0$，严格凹等价于 $f''(x) < 0$
- 凹函数的上轮廓集 $\{x \in D : f(x) \geq z\}$ 是闭凸集

Hessian 矩阵

给定二阶连续可微函数 $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$，其混合二阶导记为 $f_{ij}(x)=\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$，$\forall i,j=1,\ldots,n$

- Hessian 矩阵 $H_f(x)$ 定义为

$$H_f(x)=\left[f_{ij}(x)\right]_{1\le i,j\le n}=\begin{bmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

- Hessian 矩阵是一个实数对称矩阵，即 $H_f(x)=H_f^{\intercal}(x)$，$^{\intercal}$ 表示矩阵的转置
- n-阶实对称矩阵 A 半负定的条件：对任意的 $1\times n$ 列向量 $x\in\mathbb{R}^n$，有 $x^{\intercal}Ax\le 0$
- n-阶实对称矩阵 A 负定的条件：对任意的 $1\times n$ 列非零向量 $x\in\mathbb{R}^n$，有 $x^{\intercal}Ax<0$

半负定、负定矩阵的判别条件

若 n-阶对称矩阵 A 为半负定矩阵，则下列条件等价

- A 的 n 个特征值 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ 均小于或等于 0
- 以 A_k 记 A 的前 k 行、k 列元素组成的 $k \le n$ 阶矩阵，则 $(-1)^k \det A_k \ge 0$，即 $\det A_1 \le 0, \det A_2 \ge 0, \dots$

若 n-阶对称矩阵 A 为负定矩阵，则下列条件等价

- A 的 n 个特征值 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ 均小于 0
- 以 A_k 记 A 的前 k 行、k 列元素组成的 $k \le n$ 阶矩阵，则 $(-1)^k \det A_k > 0$，即 $\det A_1 < 0, \det A_2 > 0, \dots$

类似可以定义半正定、正定矩阵，以正定矩阵为例：$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$，有 $x^\mathsf{T} A x > 0 \Leftrightarrow$ 其所有特征值大于 $0 \Leftrightarrow \det A_k > 0,\ \forall k = 1,\dots,n$

约束最优化问题的一阶必要条件

给定 $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ 连续可微，$g_j : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ 连续可微，$j = 1, \ldots, \ell$，约束最优化问题

$$\max_x f(x) \text{ s.t. } g_j(x) \le 0,\ j = 1, \ldots, \ell$$

的解 $x^* = (x_1^*, \ldots, x_k^*)$ 满足如下一阶（必要）条件：

1. 存在非负实数 $\phi_1^*, \ldots, \phi_\ell^*$, 使得

$$\partial_i f(x^*) = \phi_1^* \partial_i g_1(x^*) + \cdots + \phi_\ell^* \partial_i g_\ell(x^*), \quad i = 1, \ldots, k,$$

   其中 ∂_i 表示对 x_i 的偏导数，ϕ_i^* 称为 g_i 的 Lagrange 乘子，

2. $\phi_j^* g_j(x^*) = 0$ 对所有 ϕ_j^* 成立

其中 2 称为互补松弛条件 (complementary slackness condition)

凸优化的性质

- 若 f 为凸集 D 上的凹函数，且 g_j 使得约束集 C 也是凸集，则对应的最优化问题是一个凸优化问题
- 对可微凸优化问题，即 f, g_j 均可微，$j = 1, \ldots, \ell$，前述必要条件亦为充分条件
- 更一般地，若目标函数 f 的上轮廓集均为凸集，则对应的最优化问题称为凸优化问题
- 上轮廓集为凸集的函数称为拟凹函数

本节内容

对应 (correspondence) 的基本概念

给定 $X \subset \mathbb{R}^k$，$Y \subset \mathbb{R}^m$，$X, Y \neq \varnothing$

- 若对 X 中的任一点 x，$\varphi(x)$ 是 Y 的一个子集，则称 φ 为 X 到 Y 的一个对应，记作 $\varphi : X \rightrightarrows Y$

对应与映射 (map) 的联系

映射是集合 X 与集合 Y 之间点到点的对应关系，记作 $X \to Y$，为单箭头

- 此处“对应”仅是常规词义，非前页定义的概念
- 此处“点”就是集合的元素，而非集合的子集
- 函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 就是定义域 X 到实数 $\mathbb{R}$ 的映射

对应是集合 X 的点与集合 Y 的子集之间的对应关系，记作 $X \rightrightarrows Y$，为双箭头

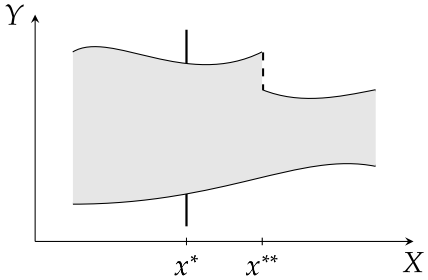
- 对应也可以理解为映射，即 X 到 Y 的幂集的映射
- Y 的幂集即 Y 的所有子集构成的集合，通常记为 2^Y
- 换言之，$X \rightrightarrows Y$ 等价于 $X \to 2^Y$

对应的连续性

- 给定 X 中任一点 x，若对 X 中任意收敛到 x 的序列 $\{x_n\}$，以及 Y 中任何一个满足 $y_n \in \varphi(x_n), \forall n = 1, \ldots, \infty$ 且收敛到 y 的序列 $\{y_n\}$，均有 $y \in \varphi(x)$，则称 φ 在 x 处上半连续 (upper semi continuous)；若 φ 在 X 中处处上半连续，则称其为上半连续对应
- 给定 X 中任一点 x，若对 X 中任意收敛到 x 的序列 $\{x_n\}$ 以及 Y 中任一 $y \in \varphi(x)$，均存在 Y 中满足 $y_n \in \varphi(x_n), \forall n = 1, \ldots, \infty$ 且收敛到 y 的序列 $\{y_n\}$，则称 φ 在 x 处下半连续 (lower semi continuous)；若 φ 在 X 中处处下半连续，则称其为下半连续对应
- 若 φ 在 $x \in X$ 处既是上半连续又是下半连续，则称其在 x 连续；若 φ 在 X 中处处连续，则称 φ 为连续对应

上半、下半连续对应示例

下图表示对应 $\varphi : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ 的图，记作 G_{φ}，$\varphi(x)$ 为上下两条线之间的集合，包含 x^* 处上下线段，不包含 x^{**} 处虚线部分



在 x^* 处是上半连续，但非下半连续；在 x^{**} 处是下半连续，但非上半连续

进一步解释

- x^* 处上半连续：对任意的 (x_n, y_n) 满足 $y_n \in \varphi(x_n)$，$\lim_n x_n = x^*$ 以及 $\lim_n y_n = y^*$，都有 $y^* \in \varphi(x^*)$
  - 可以类比于欧式空间中的闭集
- x^{**} 处下半连续：对任意的 $y^{**} \in \varphi(x^{**})$，都可找到 (x_n, y_n) 且 $y_n \in \varphi(x_n)$，使得 $\lim_n(x_n, y_n) = (x^{**}, y^{**})$
  - 在 Y 的维度，y^{**} 不会与 x^{**} 附近的 x 对应的像集 $\varphi(x)$ 断开
- x^* 处非下半连续：前图中，x^* 上下两个突出灰色区域的线段上的 y^*，就无法找到 $y_n \in \varphi(x_n)$ 使其收敛到 y^*
- x^{**} 处非上半连续：前图中，如果 $y_n \in \varphi(x_n)$ 收敛到 x^{**} 处对应的虚线区间的 y^{**}，则 $y^{**} \notin \varphi(x^{**})$

对应与带参数的最优化

定理 2 (Berge 最大值定理)

设 $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ 为一连续函数，$\varphi: X \rightrightarrows Y$ 为一连续（上半连续、下半连续）且紧致（对任一 $x \in X$，$\varphi(x)$ 紧致）对应，则对任一 $x \in X$，考虑

$$\max_{y \in Y} f(x, y) \quad \text{s.t.} \quad y \in \varphi(x),$$

并定义从 X 到 Y 的对应 $\eta(x) = \operatorname{argmax}_{y \in \varphi(x)} f(x, y)$，称为最大值对应

1. 最大值对应 η 上半连续且紧致
2. 最大值函数 $h(x) = \max_{y \in \varphi(x)} f(x, y)$ 连续

Kakutani 不动点定理

定理 3 (Kakutani)

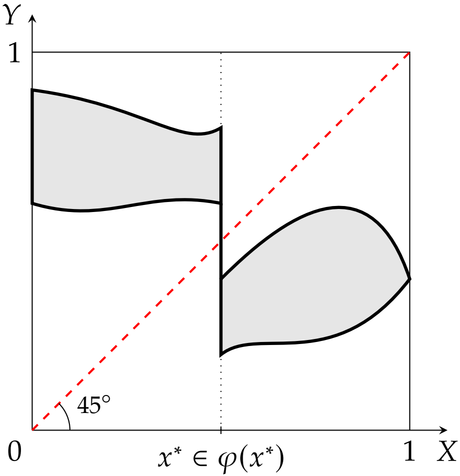
若 X 是欧式空间中的紧致凸集，$\varphi : X \rightrightarrows X$ 是上半连续的凸对应，则存在 $x \in X$ 满足 $x \in \varphi(x)$

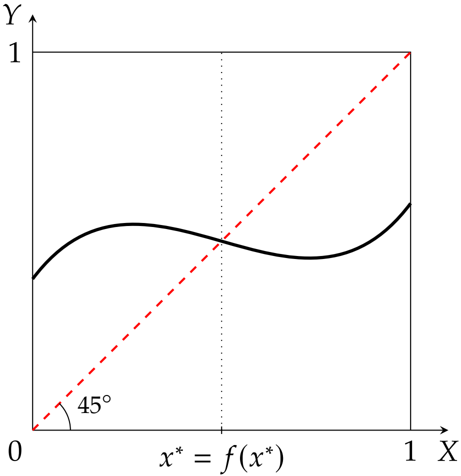
Kakutani 不动点定理可以看做 Brouwer 不动点定理的一般形式，或将后者看做前者的特例

定理 4 (Brouwer)

若 X 是欧式空间中的紧致凸集，$f : X \to X$ 是连续映射，则存在 $x \in X$ 满足 $x = f(x)$

不动点定理示例：Kakutani vs. Brouwer





不存在不动点：对应不上半连续 vs. 映射不连续