

高级微观经济学

# 第 0 讲：数学基础提要

授课人：刘岩

武汉大学经管学院金融系

2022 年 10 月 4 日

# 本讲内容

- 1 欧式空间的基本性质
- 2 约束最优化与凸性
- 3 对应与不动点定理

## 本节内容

① 欧式空间的基本性质

② 约束最优化与凸性

③ 对应与不动点定理

## 基本记号

## 关于集合

- $x \in X$ ,  $X \subset Y$ ,  $X^c$ ,  $\emptyset$ : 空集
- $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ : 集合列的并,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ : 集合列的交,  $n = 1, \dots, \infty$

## 关于欧式空间

- $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ : 实线 (实数集合)
- $\mathbb{R}^k = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ :  $k$  维欧式空间,  $k$  为正整数
- $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ :  $\mathbb{R}^k$  中一点 (向量)

$\mathbb{R}^k$  的线性代数结构

$\mathbb{R}^k$  是一个线性空间

- $0 = (0, \dots, 0)$ :  $\mathbb{R}^k$  的零点 (零向量)
- $\mathbb{R}^k$  中的加法:  $x = (x_1, \dots, x_k), y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ ,

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_k + y_k) \in \mathbb{R}^k$$

- $\mathbb{R}^k$  中的数乘:  $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k, \alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_k) \in \mathbb{R}^k$$

- $-x = (-x_1, \dots, -x_k), x - y = x + (-y), x - x = 0$

$\mathbb{R}^k$  上的内积和模 $\mathbb{R}^k$  上的内积

- 对  $\mathbb{R}^k$  中的任意两点  $x, y$ , 定义  $x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_k y_k$ , 称为  $x$  和  $y$  的内积
- 内积是一个对称双线性函数:  $x \cdot y = y \cdot x$ ,  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ ,  
 $(\alpha x) \cdot y = \alpha x \cdot y$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$

 $\mathbb{R}^k$  上的 (欧式) 模

- 定义  $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}$ , 称为  $x$  的欧式模
- 三角不等式:  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\mathbb{R}^k$  中的一种 (偏) 序结构

## 基本记号

- $x \geq y$ :  $x_i \geq y_i$ , 对所有  $i$
- $x > y$ :  $x \geq y$ , 且对至少一个  $i$  有  $x_i > y_i$
- $x \gg y$ :  $x_i > y_i$ , 对所有  $i$
- $\mathbb{R}_+^k = \{x \in \mathbb{R}^k : x \geq 0\}$ ,  $\mathbb{R}_-^k = \{x \in \mathbb{R}^k : x \leq 0\}$
- $\mathbb{R}_{++}^k = \{x \in \mathbb{R}^k : x \gg 0\}$ ,  $\mathbb{R}_{--}^k = \{x \in \mathbb{R}^k : x \ll 0\}$

$\geq$  在  $\mathbb{R}^k$  中定义了一个 (二元) 序关系

- 一般地,  $(\mathbb{R}^k, \geq)$  是偏序集: 不是任意两个点都能比大小
- 特别地,  $(\mathbb{R}, \geq)$  是全序集: 任意两个数可以比大小

$\mathbb{R}^k$  中的开集 $\mathbb{R}^k$  中的开球

- 给定  $\mathbb{R}^k$  中的任意一点  $x$ , 对任意一个正数  $\epsilon > 0$ , 定义

$$B(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^k : \|y - x\| < \epsilon\},$$

称作以  $x$  为中心、 $\epsilon$  为半径的开球

- $B(x, \epsilon)$  的边界,  $\{y \in \mathbb{R}^k : \|y - x\| = \epsilon\}$ , 不属于  $B(x, \epsilon)$

开集的定义

- 给定  $\mathbb{R}^k$  的子集  $X$ , 若对  $X$  中的任意一点  $x$ , 都存在  $\epsilon > 0$ , 使得  $B(x, \epsilon) \subset X$ , 则称  $X$  为开集



$\mathbb{R}^k$  中的闭集

## 闭集的定义

- 给定  $\mathbb{R}^k$  的子集  $X$ , 若  $X^c$  为开集, 则称  $X$  为闭集
- 直观地说, 闭集包含其边界
- 特别地,  $\mathbb{R}^k$  和  $\emptyset$  既是开集又是闭集

一个重要性质——给定一系列集合  $\{X_n \subset \mathbb{R}^k : n = 1, 2, \dots, \}$ :

- 若所有的  $X_n$  都是开集, 则  $\bigcup_n X_n$  也是开集,
- 若所有的  $X_n$  都是闭集, 则  $\bigcap_n X_n$  也是闭集

$\mathbb{R}^k$  中的极限

$\mathbb{R}^k$  上的 (欧式) 距离

- 对于  $\mathbb{R}^k$  中的两点  $x, y$ , 定义其距离为  $\|x - y\|$ , 即向量差的欧式模

$\mathbb{R}^k$  中点列的极限

- 给定  $\mathbb{R}^k$  中点列  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  及点  $x$ , 若对于任意的正数  $\epsilon > 0$ , 都存在正整数  $N$ , 使得不等式

$$\|x_n - x\| < \epsilon$$

对任意  $n > N$  成立, 则称  $x$  为  $\{x_n\}$  的极限, 记作  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

## 闭集与点列的收敛性

## 点列的收敛性

- 给定点列  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , 若存在点  $x$ , 使得  $\{x_n\}$  以  $x$  为极限, 则称  $\{x_n\}$  收敛, 否则称其发散

## 闭集的一个重要性质

- 若  $X$  为闭集,  $\{x_n\} \subset X$  收敛, 则  $\lim_n x_n \in X$ , 换言之,  $X$  中任一收敛点列的极限也属于  $X$
- 逆命题也成立: 给定  $X \subset \mathbb{R}^k$ , 若  $X$  中任一收敛点列的极限也属于  $X$ , 则  $X$  是闭集

## $\mathbb{R}^k$ 中的紧集

### 紧集的定义

- $\mathbb{R}^k$  中的有界闭集称为紧集

### 紧集的重要性质

- 若  $X$  为紧集，则  $X$  中的任意点列均有收敛子列
- 逆命题也成立：给定  $X$ ，若其中任意点列均有收敛子列且极限也属于  $X$ ，则  $X$  是紧集

## 点列收敛的条件

 $\mathbb{R}^k$  中的 Cauchy 列

- 给定  $\{x_n\}$  若对任意的  $\epsilon > 0$ , 存在  $N$ , 使得

$$\|x_n - x_m\| < \epsilon$$

对任意的  $n, m > N$  成立, 则称  $\{x_n\}$  为 Cauchy 列

- 点列收敛当且仅当其为 Cauchy 列

 $\mathbb{R}$  中的单调列

- $\mathbb{R}$  中的有界单调列是 Cauchy 列, 故收敛

## $\mathbb{R}$ 中点集的上、下确界

### 定义

- 给定  $\mathbb{R}$  中的一个非空集合  $X$
- $X$  的最小上界称为上确界, 记为  $\sup X$
- $X$  的最大下界称为下确界, 记为  $\inf X$
- 若  $X$  无上界, 则约定  $\sup X = \infty$ , 若无下界, 则  $\inf X = -\infty$

### 性质

- 若  $X$  有上界, 则  $\sup X$  存在且有限
- 若  $X$  有下界, 则  $\inf X$  存在且有限

## 本节内容

- 1 欧式空间的基本性质
- 2 约束最优化与凸性
- 3 对应与不动点定理

## 连续函数

## 定义

- 给定  $D \subset \mathbb{R}^k$  以及其上的函数  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$
- 给定点  $x \in D$ , 若对于任意  $\epsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

对任一  $y \in D \cap B(x, \delta)$  成立, 则称  $f$  在  $x$  处连续

- 若  $f$  在  $D$  中每一点连续, 则称其为 ( $D$  上的) 连续函数

## 基本性质

- 若  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  连续,  $\{x_n\} \subset D$  收敛且极限  $x_0 \in D$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$



## 函数值域的上、下确界

- 给定  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\{f(x) : x \in D\}$  称为  $f$  的值域
- $f$  值域的上、下确界分别简记为  $\sup_{x \in D} f(x), \inf_{x \in D} f(x)$
- 若  $f$  有界, 则其上、下确界均有限
- 若存在  $x_0 \in D$  使得  $f(x_0) = \sup_x f(x)$ , 则称  $\sup_x f(x)$  为  $f$  的最大值, 记为  $\max_x f(x)$
- 若存在  $x_1 \in D$  使得  $f(x_1) = \inf_x f(x)$ , 则称  $\inf_x f(x)$  为  $f$  的最小值, 记为  $\min_x f(x)$

## 紧集上的连续函数

## 定理 1 (Weierstrass)

若  $D \subset \mathbb{R}^k$  为紧集,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  连续, 则

- ①  $f$  有界,  $\sup_x f(x), \inf_x f(x)$  存在且有限,
- ② 存在  $x_0, x_1 \in D$  使得

$$f(x_0) = \sup_x f(x) \quad f(x_1) = \inf_x f(x)$$

亦即  $f$  在  $D$  上能取到最大值、最小值

## 约束最优化的一般形式

- 给定目标函数  $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$
- 及  $\ell$  个（不等式）约束  $g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, \ell$ , 定义约束集

$$C = \{x \in D : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, \ell\}.$$

- 对应的约束最优化问题记作：

$$\sup_{x \in C} f(x) \quad \text{或} \quad \sup f(x) \text{ s.t. } g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, \ell.$$

- 通常而言,  $C$  是紧集而  $f$  连续, 故上述最优化问题有解, 因此也直接写作  $\max_{x \in C} f(x)$

## 凸性

- 给定  $X \subset \mathbb{R}^k$ , 若对于任意的  $x, y \in X$  及  $0 \leq \alpha \leq 1$ , 有  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in X$ , 则称  $X$  为凸集
- 凸集簇的任意交还是凸集
- 给定凸集  $D \subset \mathbb{R}^k$  及  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , 若对于任意的  $x, y \in D$  及  $0 \leq \alpha \leq 1$ , 有

$$\alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \leq f(\alpha x + (1 - \alpha)y),$$

则称  $f$  为凹（或上凸）函数；若上式中  $<$  成立，则称其为严格凹函数

- 若上述定义中的不等号方向相反，则称为（严格）凸函数

## 凹函数的性质

- 凹函数是连续函数
- 若  $f$  为紧致凸集  $D$  上的凹函数，则其局部最大值为全局最大值
- 若  $f$  为紧致凸集  $D$  上的严格凹函数，则其存在**唯一**的  $x_0 \in D$  使得
$$f(x_0) = \max_x f(x)$$
- 若  $f$  二阶连续可微，则  $f$  是凹函数等价于  $f$  的 Hessian 矩阵半负定， $f$  是严格凹函数等价于  $f$  的 Hessian 矩阵负定
- 凹函数的上轮廓集  $\{x \in D : f(x) \geq z\}$  是闭凸集

## 约束最优化问题的一阶必要条件

给定  $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  连续可微,  $g_j : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  连续可微,  $j = 1, \dots, \ell$ , 约束最优化问题

$$\max_x f(x) \text{ s.t. } g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, \ell$$

的解  $x^* = (x_1^*, \dots, x_k^*)$  满足如下一阶 (必要) 条件:

- ① 存在非负实数  $\phi_1^*, \dots, \phi_\ell^*$ , 使得

$$\partial_i f(x^*) = \phi_1^* \partial_i g_1(x^*) + \dots + \phi_\ell^* \partial_i g_\ell(x^*), \quad i = 1, \dots, k,$$

其中  $\partial_i$  表示对  $x_i$  的偏导数,  $\phi_i^*$  称为  $g_i$  的 Lagrange 乘子,

- ②  $\phi_j^* g_j(x^*) = 0$  对所有  $\phi_j^*$  成立

其中 2 称为互补松弛条件 (complementary slackness condition)

## 凸优化的性质

- 若  $f$  为凸集  $D$  上的凹函数，且  $g_j$  使得约束集  $C$  也是凸集，则对应的最优化问题是一个凸优化问题
- 对可微凸优化问题，即  $f, g_j$  均可微， $j = 1, \dots, \ell$ ，前述必要条件亦为充分条件
- 更一般地，若目标函数  $f$  的上轮廓集均为凸集，则对应的最优化问题称为凸优化问题
- 上轮廓集为凸集的函数称为拟凹函数

## 本节内容

- 1 欧式空间的基本性质
- 2 约束最优化与凸性
- 3 对应与不动点定理**



## 对应 (correspondence) 的基本概念

给定  $X \subset \mathbb{R}^k$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^m$ ,  $X, Y \neq \emptyset$

- 若对  $X$  中的任一点  $x$ ,  $\varphi(x)$  是  $Y$  的一个子集, 则称  $\varphi$  为  $X$  到  $Y$  的一个对应, 记作  $\varphi: X \rightrightarrows Y$
- 给定  $x \in X$ , 若对任意  $\{x_n\} \subset X$ ,  $\{y_n\} \subset Y$ , 满足  $y_n \in \varphi(x_n)$ ,  $\lim x_n = x$  且  $\lim y_n = y$ , 即有  $y \in \varphi(x)$ , 则称  $\varphi$  在  $x$  处上半连续 (upper semi continuous); 若  $\varphi$  在  $X$  中处处上半连续, 则称其为上半连续对应
- 给定  $x \in X$ , 若对任意  $\{x_n\} \subset X$  满足  $\lim x_n = x$  和任意  $y \in \varphi(x)$ , 均存在  $\{y_n\} \in Y$  满足  $y_n \in \varphi(x_n)$  且  $\lim y_n = y$ , 则称  $\varphi$  在  $x$  处下半连续 (lower semi continuous); 若  $\varphi$  在  $X$  中处处下半连续, 则称其为下半连续对应

## 对应与带参数的最优化

## 定理 2 (Berge 最大值定理)

设  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  为一连续函数,  $\varphi : X \rightrightarrows Y$  为一连续 (上半连续、下半连续) 且紧致 (对任一  $x \in X$ ,  $\varphi(x)$  紧致) 对应, 则对任一  $x \in X$ , 考虑

$$\max_{y \in Y} f(x, y) \quad \text{s.t.} \quad y \in \varphi(x),$$

并定义从  $X$  到  $Y$  的对应  $\eta(x) = \operatorname{argmax}_{y \in \varphi(x)} f(x, y)$ , 称为最大值对应

- ① 最大值对应  $\eta$  上半连续且紧致
- ② 最大值函数  $h(x) = \max_{y \in \varphi(x)} f(x, y)$  连续

## Kakutani 不动点定理

### 定理 3 (Kakutani)

若  $X$  是欧式空间中的紧致凸集,  $\varphi : X \rightrightarrows X$  是上半连续的凸对应, 则存在  $x \in X$  满足  $x \in \varphi(x)$

Kakutani 不动点定理可以看做 Brouwer 不动点定理的一般形式, 或将后者看做前者的特例

### 定理 4 (Brouwer)

若  $X$  是欧式空间中的紧致凸集,  $f : X \rightarrow X$  是连续映射, 则存在  $x \in X$  满足  $x = f(x)$