2015 年春硕士货币经济学课程

第 2 讲：基本的新凯恩斯模型

授课人：刘岩

武汉大学经管学院金融系

2015 年 4 月 10 日

本讲内容

1. Phillips 曲线的推导
2. 基本模型的求解
3. 福利损失函数与最优货币政策

本节内容

1. Phillips 曲线的推导
2. 基本模型的求解
3. 福利损失函数与最优货币政策

消费者效用：更加一般的情形

$$\mathcal{L} = \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \Big\{ \Big[u(C_t - G_t; \xi_t) - \int_0^1 v(h_t(i); \xi_t) \mathrm{d}i \Big] - \Lambda_t \Big[P_t C_t + B_{t+1} - R_t B_t - \int_0^1 w_t(i) h_t(i) \mathrm{d}i \Big] \Big\}.$$

劳动供给的一阶条件为

$$\frac{v_h(h_t(i); \xi_t)}{u_c(C_t - G_t; \xi_t)} = \frac{w_t(i)}{P_t} \quad \text{实际工资率}.$$

劳动市场假设是完全竞争的。

中间品厂商的边际成本

- 中间品厂商的生产函数为 $y_t(i) = A_t f(h_t(i))$；对应的成本函数为 $w_t(i) f^{-1}(y_t(i)/A_t)$。
- 对成本函数求导（关于 $y_t(i)$）可得名义边际成本函数

$$S_t(i) = \frac{w_t(i)}{A_t}\Phi(y_t(i)/A_t) = \frac{w_t(i)}{A_t}\frac{1}{f'(f^{-1}(y_t(i)/A_t))}.$$

- 进一步可得实际边际成本函数

$$s_t(i) = \frac{S_t(i)}{P_t} = s(y_t(i), Y_t; \tilde{\xi}_t),$$

$$s(y, Y; \tilde{\xi}) = \frac{v_h(f^{-1}(y/A); \xi)}{u_c(Y - G; \xi)A}\Phi(y/A).$$

均衡时自然产出水平

- 中间品厂商面对的需求函数为 $y_t(i) = Y_t(p_t(i)/P_t)^{-\theta}$（先考虑 $\theta_t = \theta$ 为常数的情形）。
- 如果厂商 i 能自由选择价格 $p(i)$，则其单期最大化问题为

$$\max_{p(i)} p(i)y(i) - wf^{-1}(y(i)/A),$$

其一阶条件为

$$y(i) + (p(i) - Ps(i))y'(i) = 0 \Longrightarrow \frac{p_i}{P} = \frac{\theta}{\theta - 1}s(y(i)) \equiv \mu s(y(i)).$$

- 均衡时 $p_t(i) = P_t$；定义自然产出水平 Y_t^n 为厂商可以自由选择价格时的均衡产出，则 Y_t^n 由 $s(Y_t^n, Y_t^n; \tilde{\xi}_t) = \mu^{-1}$ 确定。

Calvo 延迟定价

单个厂商的单期利润函数为：

$$
\begin{aligned}
\Pi(p, P, Y, \tilde{\xi}) = {} & pY(p/P)^{-\theta} \\
& - \frac{v_h(f^{-1}(Y(p/P)^{-\theta}/A); \xi)}{u_c(Y-G; \xi)A} P f^{-1}(Y(p/P)^{-\theta}/A).
\end{aligned}
$$

给定 $\alpha \in [0,1]$ 为厂商不能调价的概率，则其调整一次价格后的利润现值为

$$
\mathbb{E}_t \left\{ \sum_{T=t}^{\infty} \alpha^{T-t} Q_{t,T} \Pi(p_t(i), P_T, Y_T, \tilde{\xi}_T) \right\},
$$

其中 $Q_{t,T} = \beta^{T-t} \Lambda_T / \Lambda_t$ 为（名义）随机折现因子（定价核）。最优定价 p_t^* 对应的一阶条件为

$$
\mathbb{E}_t \left\{ \sum_{T=t}^{\infty} \alpha^{T-t} Q_{t,T} \Pi_1(p_t^*(i), P_T, Y_T, \tilde{\xi}_T) \right\} = 0.
$$

Calvo 定价公式

由 $\Pi_1 = (1-\theta)Y(p/P)^{-\theta} + \theta Y(p/P)^{-\theta-1} s(y, Y, \tilde{\xi})$ 可知

$$\mathbb{E}_t \Big\{ \sum_{T=t}^{\infty} \alpha^{T-t} Q_{t,T} [(1-\theta) Y_T (p_t^*(i)/P_T)^{-\theta} + \theta Y_T (p_t^*(i)/P_T)^{-\theta-1} s_T(i)] \Big\} = 0.$$

故 Calvo 定价公式为（$\pi_{t,T}$ 为累计通胀率）：

$$p_t^* = \frac{\theta}{\theta-1} \frac{\mathbb{E}_t \sum_{T\geq t} \alpha^{T-t} Q_{t,T} Y_T P_T^{\theta+1} s_T(i)}{\mathbb{E}_t \sum_{T\geq t} \alpha^{T-t} Q_{t,T} Y_T P_T^{\theta}}$$

$$\iff \frac{p_t^*}{P_t} = \frac{\theta}{\theta-1} \frac{\mathbb{E}_t \sum_{T\geq t} \alpha^{T-t} Q_{t,T} Y_T \pi_{t,T}^{\theta+1} s_T(i)}{\mathbb{E}_t \sum_{T\geq t} \alpha^{T-t} Q_{t,T} Y_T \pi_{t,T}^{\theta}}.$$

一阶条件的对数线性近似

- 弹性价格稳态时有 $p_t/P_t = 1$，$Y_t = Y_t^n = \bar{Y}$ 满足 $\mu s(\bar{Y}, \bar{Y}, 0) = 1$。下面所有对数线性化都基于这个稳态。
- 由 $\Pi_1 = -(\theta - 1)Y(p/P)^{-\theta-1}[p/P - \mu s(Y(p/P)^{-\theta}, Y, \tilde{\xi})]$，并利用 $\log(\mu s(y, Y, \tilde{\xi})) = \omega\hat{y} + \sigma^{-1}\hat{Y} - (\omega + \sigma^{-1})\hat{Y}^n$ 可知

$$\Pi_1 \approx \Phi_p[\log(p/P) - \zeta(\hat{Y} - \hat{Y}^n)],$$

其中 $\zeta = (\omega + \sigma^{-1})/(1 + \omega\theta)$。
- 再由 $\bar{Q} = \beta$，可知最优定价的一阶条件近似为

$$\sum_{T=t}^{\infty}(\alpha\beta)^{T-t}\mathbb{E}_t[\log p_t^* - \log P_T - \zeta(\hat{Y}_T - \hat{Y}_T^n)] = 0.$$

Calvo 定价的一阶近似

最优定价一阶条件对数线性近似可以写作

$$\log p_t^* = (1-\alpha\beta)\sum_{T=t}^{\infty}(\alpha\beta)^{T-t}\mathbb{E}_t[\log P_T + \zeta(\hat{Y}_T - \hat{Y}_T^n)]$$

$$\Longrightarrow \log(p_t^*/P_t) = \sum_{T=t}^{\infty}(\alpha\beta)^{T-t}\mathbb{E}_t[\alpha\beta\pi_{T+1} + (1-\alpha\beta)\zeta(\hat{Y}_T - \hat{Y}_T^n)]$$

$$\Longrightarrow \hat{p}_t^* = \sum_{T=t}^{\infty}(\alpha\beta)^{T-t}\mathbb{E}_t[\alpha\beta\pi_{T+1} + (1-\alpha\beta)\zeta(\hat{Y}_T - \hat{Y}_T^n)]$$

$$\hat{p}_t^* = [\alpha\beta\mathbb{E}_t\pi_{T+1} + (1-\alpha\beta)\zeta x_t] + \alpha\beta\mathbb{E}_t\hat{p}_{t+1}^*.$$

其中 $x_t = \hat{Y}_T - \hat{Y}_T^n$ 称为产出缺口，$\pi_{T+1} = \log(P_{T+1}/P_T)$。

定价加总和 Phillips 曲线

- 加总价格满足为

$$P_t^{1-\theta} = \int_0^1 p_t(i)^{1-\theta}\mathrm{d}i = (1-\alpha)p_t^{*1-\theta} + \alpha\int_0^1 p_{t-1}(i)^{1-\theta}\mathrm{d}i.$$

- 故有 $P_t = [(1-\alpha)p_t^{*1-\theta} + \alpha P_{t-1}^{1-\theta}]^{1/(1-\theta)}$，其对数线性近似为 $\log P_t = \alpha\log P_{t-1} + (1-\alpha)\log p_t^*$，也可写为 $\pi_t = \frac{1-\alpha}{\alpha}\hat{p}_t^*$。
- 该式与一阶条件近似联立可得新凯恩斯 Phillips 曲线

$$\pi_t = \kappa x_t + \beta\mathbb{E}_t\pi_{t+1},$$

其中 $\kappa = \frac{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)}{\alpha}\zeta$。

本节内容

一般情况下的 IS 曲线

均衡时的 Euler 方程

$$\frac{1}{1+i_t} = \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{u_c(Y_{t+1} - G_{t+1}; \xi_{t+1})}{u_c(Y_t - G_t; \xi_t)} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right].$$

对数线性化可得

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t &= g_t + \mathbb{E}_t(\hat{Y}_{t+1} - g_{t+1}) - \sigma(i_t - \mathbb{E}_t \pi_{t+1}) \\ \iff x_t &= \mathbb{E}_t x_{t+1} - \sigma(i_t - \mathbb{E}_t \pi_{t+1} - \hat{r}_t^n), \end{aligned}$$

其中自然利息率 $\hat{r}_t^n = \sigma^{-1}[(g_t - \hat{Y}_t^n) - \mathbb{E}_t(g_{t+1} - \hat{Y}_{t+1}^n)]$，完全由外生冲击决定；$\sigma = -u_c/(\bar{C} u_{cc})$ 为跨期替代弹性。

三个基本方程

- 一般情况下的 IS 曲线可写为

$$x_t = \mathbb{E}_t x_{t+1} - \sigma(i_t - E_t \pi_{t+1} - r_t^n),$$

其中 $x_t = \hat{Y}_t - \hat{Y}_t^n$，$r_t^n$ 为自然利息率（完全由外生冲击决定）。

- Phillips 曲线

$$\pi_t = \kappa x_t + \beta \mathbb{E}_t \pi_{t+1},$$

- Taylor 规则

$$i_t = \bar{\imath}_t + \phi_\pi(\pi_t - \bar{\pi}) + \phi_x(x_t - \bar{x}),$$

$\bar{\pi}, \bar{x}$ 分别为通胀目标和相应的产出缺口目标。

外生货币政策导致均衡不稳定

定理 1 (Sargent and Wallace 1975 JPE)

假设名义利率 $\{i_t\}$ 完全为一个外生随机过程（不依赖于内生变量 x_t, π_t），则相应的理性预期均衡一定是不稳定的。

此时模型可写为 $\mathbb{E}_t z_{t+1} = A z_t + a(\hat{r}_t^n - i_t)$，$z_t = [\pi_t, x_t]^\top$，

$$A = \begin{bmatrix} \beta^{-1} & -\beta^{-1}\kappa \\ -\beta^{-1}\sigma & 1+\beta^{-1}\kappa\sigma \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sigma \end{bmatrix}.$$

对应的特征多项式为

$$\mathcal{P}(\mu) = \mu^2 - [1+\beta^{-1}(1+\kappa\sigma)]\mu + \beta^{-1}.$$

可验证 $\mathcal{P}(0) > 0$，$\mathcal{P}(1) < 0$，故一定有一个特征值小于 1。

稳定均衡的基本结果

定理 2 (McCallum 1981 JME 首先提出)

当 Taylor 规则的系数 $\phi_\pi, \phi_x \geq 0$ 满足 $\phi_\pi + \frac{1-\beta}{\kappa}\phi_x > 1$ 时，理性预期均衡是稳定的。

模型可写为 $\mathbb{E}_t z_{t+1} = Az_t + a(\hat{r}_t^n - \bar{\imath}_t + \bar{\pi})$，$z_t = [\pi_t - \bar{\pi}, x_t - \bar{x}]^\top$，

$$A = \begin{bmatrix} \beta^{-1} & -\beta^{-1}\kappa \\ \sigma(\phi_\pi - \beta^{-1}) & 1 + \sigma(\phi_x + \beta^{-1}\kappa) \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sigma \end{bmatrix}.$$

对应的特征多项式为

$$\mathcal{P}(\mu) = \mu^2 - [1 + \beta^{-1}(1 + \kappa\sigma) + \sigma\phi_x]\mu + \beta^{-1}[1 + \sigma(\phi_x + \kappa\phi_\pi)].$$

可验证定理中的条件保证两个特征值都在单位圆之外。

本节内容

福利损失函数

- DSGE 模型的一个极大便利是可以逻辑一致的进行最优政策讨论：目标福利函数就可选为代表性消费者的折现期望效用 $E_0 \sum_{t\geq 0} \beta^t U_t$。
- 一般而言，消费者的折现期望效用都是复杂的非线性函数，其对货币政策的依赖性质不容易分析。
- 为此，通常对该函数进行 2 阶近似，从而可以对不同货币政策规则的福利性质进行比较，或者推导最优货币政策。
- 最优货币政策可以有很多种含义：相机抉择型、政策承诺型等等。

基本模型的福利损失函数

对基本模型中的消费者效用进行 2 阶近似，可得

$$U_t = -\frac{\bar{Y}u_c}{2}\Big[(\sigma^{-1}+\omega)(x_t - x^*)^2 + \theta(1-\omega\theta)\mathrm{var}_i \log p_t(i)\Big]$$
$$+ \text{t.i.p.} + \mathcal{O}(||\Phi, \tilde{\xi}||^3).$$

此处可见名义刚性造成的福利损失 $\mathrm{var}_i \log p_t(i)$：有效均衡要求所有技术相同的厂商的产出和价格一致，但名义刚性造成部分厂商无法调整价格从而使其产出偏离有效水平。

在新凯恩斯 Phillips 曲线设定下，可进一步推知福利损失函数为

$$E_0 \sum_{t\geq 0} \beta^t L_t = E_0 \sum_{t\geq 0} \beta^t \Big[\pi_t^2 + \lambda(x_t - x^*)^2\Big].$$

准备工作

令 $\tilde{u}(Y;\tilde{\xi}) = u(Y-G;\xi), \tilde{v}(y;\tilde{\xi}) = v(f^{-1}(y/A);\xi)$，有

$$U_t = \tilde{u}(Y_t;\tilde{\xi}_t) - \int_0^1 \tilde{v}(y_t(i);\tilde{\xi}_t)\mathrm{d}i.$$

稳态时的产出满足 $s(\bar{Y},\bar{Y},0) = (1-\tau)/\mu = 1-\Phi$，而有效产出满足 $s(Y^*,Y^*,0)=1$；τ 为产品税率。两者关系为

$$x^* = \log(Y^*/\bar{Y}) = (\omega+\sigma^{-1})^{-1}\Phi + \mathcal{O}(||\Phi||^2),$$

x^* 也称为有效产出缺口。

第一步：对 $\tilde{u}(\cdot)$ 做二阶近似

以稳态为参照，省略三阶及以上的项：

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}(Y_t;\tilde{\xi}_t) &= \bar{u} + u_c\tilde{Y}_t + u_\xi\tilde{\xi}_t + \tfrac{1}{2}u_{cc}\tilde{Y}_t^2 + u_{c\xi}\tilde{\xi}_t\tilde{Y}_t + \tfrac{1}{2}\tilde{\xi}_t' u_{\xi\xi}\tilde{\xi}_t \\
&= \bar{u} + \bar{Y}u_c(\hat{Y}_t + \tfrac{1}{2}\hat{Y}_t^2) + u_\xi\tilde{\xi}_t + \tfrac{1}{2}\bar{Y}^2 u_{cc}\hat{Y}_t^2 \\
&\quad + \bar{Y}u_{c\xi}\tilde{\xi}_t\hat{Y}_t + \tfrac{1}{2}\tilde{\xi}_t' u_{\xi\xi}\tilde{\xi}_t \\
&= \bar{Y}u_c\hat{Y}_t + \tfrac{1}{2}[\bar{Y}u_c + \bar{Y}^2u_{cc}]\hat{Y}_t^2 - \bar{Y}^2u_{cc}g_t\hat{Y}_t + \text{t.i.p.} \\
&= \bar{Y}u_c\Big[\hat{Y}_t + \tfrac{1}{2}(1-\sigma^{-1})\hat{Y}_t^2 + \sigma^{-1}g_t\hat{Y}_t\Big] + \text{t.i.p.}
\end{aligned}
$$

t.i.p. 表示所有和政策无关的项；$\tilde{Y}_t = Y_t - \bar{Y}$，且有

$$
Y_t/\bar{Y} = 1 + \hat{Y}_t + \tfrac{1}{2}\hat{Y}_t^2 + \mathcal{O}(||\hat{y}^3||).
$$

第二步：对 $\tilde{v}(\cdot)$ 做二阶近似

$$
\begin{aligned}
\tilde{v}(y_t(i);\tilde{\xi}_t) &= \bar{Y} v_y \Big[\hat{y}_t(i) + \tfrac{1}{2}(1+\omega)\hat{y}_t(i)^2 - \omega q_t \hat{y}_t(i)\Big] + \text{t.i.p.} \\
&= \bar{Y} u_c \Big[(1-\Phi)\hat{y}_t(i) + \tfrac{1}{2}(1+\omega)\hat{y}_t(i)^2 - \omega q_t \hat{y}_t(i)\Big] + \text{t.i.p.},
\end{aligned}
$$

其中 $q_t = -v_{y\xi}\tilde{\xi}_t/(\bar{Y} v_{yy})$， $s(y,Y;\tilde{\xi}) = \tilde{v}_y(y;\tilde{\xi})/\tilde{u}_c(Y;\tilde{\xi}) \approx 1-\Phi$。
再关于 i 积分可得

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \tilde{v}(y_t(i);\tilde{\xi}_t)\mathrm{d}i &= \bar{Y} u_c \Big[(1-\Phi)\mathbb{E}_i \hat{y}_t(i) + \tfrac{1}{2}(1+\omega)\big(\mathbb{E}_i^2 \hat{y}_t(i) + \mathrm{var}_i \hat{y}_t(i)\big) \\
&\qquad - \omega q_t \mathbb{E}_i \hat{y}_t(i)\Big] + \text{t.i.p.} \\
&= \bar{Y} u_c \Big[(1-\Phi)\hat{Y}_t + \tfrac{1}{2}(1+\omega)\hat{Y}_t^2 - \omega q_t \\
&\qquad + \tfrac{1}{2}(\theta^{-1}+\omega)\mathrm{var}_i \hat{y}_t(i)\Big] + \text{t.i.p.}
\end{aligned}
$$

积分项的近似

上面的积分中

$$\mathbb{E}_i \hat{y}_t(i) = \int_0^1 y_t(i)\mathrm{d}i, \quad \mathbb{E}_i \hat{y}_t^2(i) = \int_0^1 \hat{y}_t^2(i)\mathrm{d}i = \mathbb{E}_i^2 \hat{y}_t(i) + \mathrm{var}_i \hat{y}_t(i).$$

加总函数可写为 $Y_t^{(\theta-1)/\theta} = \int_0^1 y_t(i)^{(\theta-1)/\theta}\mathrm{d}i$，对两边做 2 阶 Taylor 展开可得

$$\hat{Y}_t = \mathbb{E}_i \hat{y}_t(i) + \frac{1}{2}(1-\theta^{-1})\mathrm{var}_i \hat{y}_t(i) + \mathcal{O}(||\hat{y}^3||).$$

用此时可将前面积分中的 $\mathbb{E}_i \hat{y}_t(i)$ 替换掉。

两部分加总

将 $\tilde{u}, \tilde{v}$ 两部分效用的二阶近似相加可得

$$
\begin{aligned}
U_t = \bar{Y} u_c \Big[& \Phi \hat{Y}_t - \tfrac{1}{2}(\sigma^{-1}+\omega)\hat{Y}_t^2 + (\sigma^{-1} g_t + \omega q_t)\hat{Y}_t \\
& - \tfrac{1}{2}(\theta^{-1}+\omega)\mathrm{var}_i \hat{y}_t(i) \Big] + \text{t.i.p.} + \mathcal{O}(||\Phi, \tilde{\xi}||^3) \\
= - \frac{\bar{Y} u_c}{2} & \left[(\sigma^{-1}+\omega)(x_t - x^*)^2 + (1-\omega\theta)\mathrm{var}_i \hat{y}_t(i) \right] \\
& + \text{t.i.p.} + \mathcal{O}(||\Phi, \tilde{\xi}||^3),
\end{aligned}
$$

其中利用了 $\hat{Y}_t^n = (\sigma^{-1} g_t + \omega q_t)/(\sigma^{-1}+\omega)$，以及 $x_t = \hat{Y}_t - \hat{Y}_t^n$。特别的，名义刚性造成的产出不均 $\mathrm{var}_i \hat{y}_t(i) > 0$ 会造成福利损失。

最终的福利损失函数

CES 需求函数：$\log y_t(i) = \log Y_t - \theta(\log p_t(i) - \log P_t) \Rightarrow$
$\mathrm{var}_i \log y_t(i) = \theta^2 \mathrm{var}_i \log p_t(i) \equiv \theta^2 \Delta_t$，故

$$\begin{aligned} U_t = & -\frac{\bar{Y} u_c}{2}\Big[(\sigma^{-1}+\omega)(x_t - x^*)^2 + \theta(1-\omega\theta)\Delta_t\Big] \\ & + \text{t.i.p.} + \mathcal{O}(\|\Phi, \tilde{\xi}\|^3). \end{aligned}$$

Calvo 加总定价可得：$\Delta_t = \alpha\Delta_{t-1} + \alpha\pi_t^2/(1-\alpha) + \mathcal{O}(\|\varphi, \tilde{\xi}\|^3)$。
由此可得

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U_t = -\Omega \sum_{t=0}^{\infty} \beta\Big[\pi_t^2 + \lambda(x_t - x^*)^2\Big] + \text{t.i.p.} + \mathcal{O}(\|\Phi, \varphi, \tilde{\xi}\|^3),$$

其中 $\lambda = \kappa/\theta$，κ 为 NK Phillips 曲线中的系数，Ω 为常数。

主要的理论拓展

- 刚性工资：Erceg, Henderson & Levin 00, Blanchard & Galí 07.
- 趋势性通胀：Ascari 04, Ascari & Sbordone 14.
- 货币政策冲击响应：Christiano, Eichenbawm & Evans 05.
- Bayesian 结构计量：Smets & Wouters 03/07.
- 金融：Bernanke, Gertler & Gilchrist 99, Gertler & Kiyotaki 10.
- 最优货币政策：Svensson 97/99, Benigno & Woodford 03/05.
- 零利率约束：Eggertsson & Woodford 03/05.