2023 秋季高级微观经济学

第 2 次作业答案

无需提交

1 Edgeworth Box

a. 计算步骤为令 x 和 y 的价格为 $p, 1-p$，由 Cobb-Douglas 效用函数的性质可知：

$$x^1 = \alpha\frac{1+p}{p}, \quad y^1 = (1-\alpha)\frac{1+p}{1-p}, \quad x^2 = \alpha\frac{2-p}{p}, \quad y^1 = (1-\alpha)\frac{2-p}{1-p}.$$

由市场 x 的出清条件可知

$$x^1 + x^2 = 3 \Rightarrow p = \frac{\alpha+2\beta}{3-\alpha+\beta}.$$

由此得：

$$x^1 = 3\alpha\frac{1+\beta}{\alpha+2\beta}, \quad y^1 = 3(1-\alpha)\frac{1+\beta}{3-2\alpha-\beta}.$$

x^2, y^2 表达式省略。

b. 利用市场出清条件，可将社会福利最大化问题表示为

$$\max_{x,y} w x^{\alpha} y^{1-\alpha} + (1-w)(3-x)^{\beta}(3-y)^{1-\beta}.$$

上述问题的一阶条件可化简为

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{y}{x} = \frac{\beta}{1-\beta}\frac{3-y}{3-x}, \tag{1}$$

由此知

$$y = \frac{3(1-\alpha)\beta x}{3\alpha(1-\beta)-(\alpha-\beta)x}.$$

c. 直接验证即可。

2 最优风险分担示例

考虑 H 个家庭的交换经济，包含一个基本商品，跨越两期 $t = 0, 1$ 且 $t = 1$ 时有 S 个随机状态 $s \in \{1, \dots, S\}$，发生的概率为 π_s $\forall s \in S$。家庭在 $t = 0$ 初始禀赋均为 $e_0^h = \bar{y}/H > 0$，并进行 S 只独立的 Arrow 证券的交易；$t = 1$ 时 h 在状态 s 中得到的禀赋向量为 e_s^h，且满足对所有状态 $s \in S$，

$$\sum_{h\in H} e_s^h = \bar{y} > 0 \tag{2}$$

为常数，即加总禀赋在所有状态中均相等。家庭在 $t = 1$ 时的偏好符合期望效用形式，各自的 Bernoulli 效用函数为严格凹的连续可微函数 $u_h(x)$，故期望效用函数为 $u_h(x_0^h) \sum_{s\in S} \pi_s u_h(x_s^h)$。

a. 证明：无论个人禀赋 e_s^h 如何依 s 随机变动，只要总禀赋满足 (1) 式，则 REE 中的均衡配置一定满足 $x_1^h = \cdots = x_S^h$，即均衡时各家庭消费在所有状态均相同。这一结论需要假设 $u_1 = u_2$ 吗？提示：使用 REE 和 ADE 的等价性，通过 ADE 来直接求均衡消费配置。

   解：以 $p = (\pi_1 p_1, \ldots, \pi_S p_S)$ 记状态依存价格向量，则家庭的效用最大化问题为：

$$\max_{(x_0^h, x_1^h, \ldots, x_S^h)\in \mathbb{R}_+^{S+1}} u_h(x_0^h) + \sum_{s\in S} \pi_s u_h(x_s^h)$$

$$\text{s.t.} \quad x_0^h + \sum_{s\in S} y_s^h \pi_s p_s = e_0^h \quad (\lambda_0^h)$$

$$x_s^h = y_s^h + e_s^h \quad (\lambda_s^h)$$

   FOC 为

$$u_h'(x_0^h) = \lambda_0^h$$
$$\pi_s u_h'(x_s^h) = \lambda_s^h, \quad \forall s \in S.$$
$$\pi_s p_s \lambda_0^h = \lambda_s^h$$

   选取任意两个状态 $s, r \in S$，利用 FOC，可知

$$\frac{u_1'(x_s^1)}{u_1'(x_r^1)} = \frac{u_2'(x_s^2)}{u_2'(x_r^2)} = \cdots = \frac{u_H'(x_s^H)}{u_H'(x_r^H)}.$$

   假设 $u_1'(x_s^1) > u_1'(x_r^1)$，则由上式可知 $u_h'(x_s^h) > u_h'(x_r^h), \forall h \in H$。由 $u_h(\cdot)$ 的严格凹性可知，$x_s^h < x_r^h, \forall h \in H$。这意味着 $\sum_h x_s^h < \sum_h x_r^h$，但 s, r 两状态各自的市场条件要求前式左右两端都等于 $\bar{c}$，矛盾。交换 s, r，类似论证可说明 $u_h'(x_s^h) = u_h'(x_r^h)$ 对任意 h 和状态组合都成立。故 $x_1^h = \cdots = x_S^h$。由此易知 $x_1^h = \cdots = x_S^h = \mathbb{E}e^h$ 满足市场出清条件，且 $p_s = 1$ 为均衡价格。

b. 确定 ADE 中的均衡价格 $p_0, p_s, s = 1, \cdots, S$，进而求解均衡消费配置 $x_0^h, x_s^h, s = 1, \cdots, S$。

   解：由 a 可得，以 0 期禀赋为计价商品，$p_s = \pi_s$。则结合一阶条件有

$$u_h'(x_0^h) = u_h'(x_s^h) = \lambda_0^h$$

   因此，0 期消费与 1 期各状态消费相等（由于效用没有贴现，很容易得出家庭最优化行为是平滑所有期消费），结合预算约束条件：

$$x_0^h + \sum_{s\in S} \pi_s (x_s^h - e_s^h) = e_0^h$$

$$x_0^h = x_s^h = \frac{\mathbb{E}e^h + e_0^h}{2}$$

c. 考虑动态市场下某个消费者 h 的效用最大化问题，假设其第一期的效用函数亦为 u_h 且初始禀赋为 e_{h0}。写出预算约束，计算最优化问题的一阶条件，并考察 Arrow 证券价格与两期边际效用及状态概率 π_s 的关系。

解：由于即期市场只有一个商品，故其价格可单位化为 1。消费者 h 的效用最大化问题：

$$\begin{aligned} &\max u_h(x_0^h) + \sum_{s\in S} \pi_s u_h(x_s^h) \\ &\text{s.t. } x_0^h + \sum_{s\in S} q_s y_s^h \le e_0^h \\ &\qquad x_s^h \le e_s^h + y_s^h, \quad \forall s \in S. \end{aligned}$$

省略上标 h，构造拉格朗日函数：

$$L = u(x_0) + \sum_{s\in S} \pi_s u(x_s) + \lambda_0\left(e_0 - x_0 - \sum_{s\in S} q_s y_s\right) + \sum_{s\in S} \lambda_s(e_s + y_s - x_s).$$

一阶条件为：

$$\begin{aligned} x_0 :&\quad u'(x_0) = \lambda_0, \\ x_s :&\, \pi_s u'(x_s) = \lambda_s, \\ y_s :&\qquad \lambda_0 q_s = \lambda_s. \end{aligned}$$

由上式可得：$q_s = \pi_s u'(x_s)/u'(x_0)$。

3 最优风险分担

考虑一个不确定环境下的交换经济，包括 H 个家庭、一个基本商品，商品空间为 $X = \mathbb{R}_+$。该经济可能处于 S 个状态，每个状态发生的概率记为 $\pi_s > 0$，$\sum_s \pi_s = 1$。我们假设每个家庭 h 的偏好满足 von Neumann-Morgentern 期望效用理论，对应的 Bernoulli 效用函数为 $u_h(x)$；给定状态依存消费选择 $x = (x_s)_{s\in S}$，对应的期望效用为 $U_h(x) = \sum_s \pi_s u_h(x_s)$。每个家庭的状态依存禀赋记为 $e^h = (e_s^h)_{s\in S}$；各个状态下的总禀赋记为 $e_s = \sum_h e_s^h$。我们总假设每个家庭都是风险厌恶的（risk-averse），即 u_h 是凹函数。

a. 请证明 $U_h(x)$ 是 X^S 上的凹函数。

   证：对任意的 $x, y \in X^S$ 以及 $\alpha \in [0,1]$，由 u_h 的下凹性，可知

$$\begin{aligned} U_h(\alpha x + (1-\alpha)y) = \sum_s \pi_s u_h(\alpha x_s + (1-\alpha)y_s) \ge \\ \sum_s \pi_s(\alpha u_h(x_s) + (1-\alpha)u_h(y_s)) = \alpha U_h(x) + (1-\alpha)U_h(y). \end{aligned}$$

b. 假设 u_h 是一阶连续可微的。给定一组严格正的福利权重 $(\mu_1, \ldots, \mu_H) \in \mathbb{R}_{++}^H$，给定该经济的可行配置（feasible allocation）约束集

$$\mathcal{F} = \left\{(x^h)_{h\in H} : x_s^h \ge 0, \sum_h x_s^h \le e_s, h \in H, s \in S\right\}.$$

   首先请说明最优化问题 $\max_{(x^h)_h \in \mathcal{F}} \sum_h \mu_h U_h(x^h)$ 的解是一个 Pareto 最优配置。其次请写出最优化问题对应的 Lagrangian 函数及最优解对应的一阶必要条件；注意：请写出 $\mathcal{F}$ 中 **所有**约束对应的乘子及 **所有**的一阶条件。请问这些一阶条件也是最优解的充分条件吗？（你可以参考 Simon and Blume 讨论约束最优化的相关章节。）

证：假设 $(\bar{x}^h)_h$ 是最优化问题的解；若其不是 Pareto 最优配置，则存在 $(\hat{x}^h)_h \in \mathcal{F}$ 使得 $U_h(\hat{x}^h) \geq U_h(\bar{x}^h)$ 且严格不等号对某个 h 成立。那么必有 $\sum_h \mu_h U_h(\hat{x}^h) > \sum_h \mu_h U_h(\bar{x}^h)$，与 $(\bar{x}^h)_h$ 是最优解矛盾。

解：Lagrangian 有如下形式（这里我们采取的写法是所有约束都写为 $\leq$ 的形式）

$$L = \sum_h \mu_h U_h(x^h) - \sum_s \lambda_s \left(\sum_h x_s^h - e_s \right) - \sum_s \sum_h \phi_{sh}(-x_s^h),$$

其中 λ_s 是状态 s 中总禀赋约束的乘子，ϕ_{hs} 是消费非负约束的乘子。对应的一阶条件为：对所有 $s \in S, h \in H$ 有

$$\frac{\partial L}{\partial x_s^h} = 0 \Longrightarrow \mu_h \pi_s u_h'(x_s^h) = \lambda_s - \phi_{sh},$$

互补松弛条件（complementary slackness conditions）

$$\lambda_s \left(\sum_h x_s^h - e_s \right), \qquad \phi_{sh}(-x_s^h) = 0,$$

以及不等式条件

$$\sum_h x_s^h - e_s \leq 0, \quad x_s^h \geq 0, \quad \lambda_s \geq 0, \quad \phi_{sh} \geq 0.$$

上述条件是充分必要条件，因为目标函数 $\sum_h \mu_h U_h(x^h)$ 是凹函数（与 U_h 的凹性证法相同）。

通常，我们称这样的 Pareto 最优配置为最优风险分担（optimal risk-sharing）配置。下面你将逐步了解为什么称其为最优风险分担配置。

c. 进一步假设 u_h 二阶连续可微，严格单调递增（上一问中我们并没有这样的假设！），并且满足 Inada 条件：$\lim_{x \to 0+} \mathrm{d}u_h(x)/\mathrm{d}x = +\infty$。请证明：

  i. 此时的 Pareto 最优配置一定是内点解（interior solution）而非角点解（corner solution），即最优解 $(x^h)_h$ 满足 $x_s^h > 0$；

  证：若 $x_s^h = 0$，由 Inada 条件知，$u_h'(0) = \infty$。给定 $\mu_h, \pi_s > 0$ 且 $\lambda_s, \phi_{sh} \geq 0$（均为有限实数），$u_h'(0) = \infty$ 无法满足一阶条件 $\mu_h \pi_s u_h'(x_s^h) = \lambda_s - \phi_{sh}$。故 $x_s^h > 0$。

  ii. 给定 s，最优解时每个家庭的加权边际效用 $\mu_h u_h'(x_s^h)$ 均相同；

  证：给定 $x_s^h > 0$，由互补松弛条件可知 $\phi_{sh} = 0$，故 $\mu_h u_h'(x_s^h) = \lambda_s/\pi_s$ 对所有 h 成立。

  iii. 给定 s，若每个家庭的权重相同，$\mu_h = 1/H$，则每个家庭的 Pareto 最优消费水平 x_s^h 相同。更一般的，请证明此时 Pareto 最优消费与家庭各自的状态依存禀赋无关，亦即与个体风险（idiosyncratic risk）无关。

  证：由 (b) 中结论有 $u_h'(x_s^h) = H\lambda_s/\pi_s$。为简单期间，进一步假设 u_h 是严格凹的，即 $u_h'' < 0$。由此可知 $u_h'(\cdot)$ 是严格单调的，故其逆函数存在。因此其最优消费 $x_s^h = (u_h')^{-1}(H\lambda_s/\pi_s)$，与 e_s^h 无直接关系而只依赖于 λ_s（若 u_h 不是严格凹，则 u_h' 可能不是严格单调的；此时的最优消费选择可能是一个区间）。更一般的，$x_s^h = (u_h')^{-1}(\lambda_s/(\pi_s\mu_h))$ 也不直接依赖于 e_s^h。$(e_s^h)_h$ 全体会影响 λ_s，从而影响每个家庭的最优消费；但 e_s^h 本身不会直接影响 x_s^h。

d. 考虑这个交换经济的 AD 均衡，并假设 (2)–(3) 中关于 u_h 的假设继续成立。简单起见，假设对所有家庭有 $e^h \gg 0$。

i. 请证明：均衡配置都是内点解而非角点解。

证：假设价格向量为 $p>0$，则家庭 h 的 Lagrangian 函数为

$$L_h=\sum_s \pi_s u_h(x_s^h)-\lambda_h\sum_s p_s\big(x_s^h-e_s^h\big)-\sum_s \phi_{sh}(-x_s^h),$$

故一阶条件为 $\pi_s u_h'(x_s^h)=\lambda_h p_s-\phi_{sh}$。与 (3.a) 中相同的讨论可知，给定 Inada 条件时 $x_s^h>0$。

ii. 假设经济中没有加总风险（aggregate risk），即 $e_1=\cdots=e_S$。假设所有家庭的 Bernoulli 效用函数为相同 CRRA 型

$$u(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}, & \sigma>0,\sigma\neq 1;\\ \log(x), & \sigma=1.\end{cases}$$

验证该函数满足 Inada 条件并求解唯一的 AD 均衡。请说明均衡时所有家庭在不同状态下的消费均相同。

解：容易验证 $u(x)$ 满足 Inada 条件，且其导数可以统一写成 $u'(x)=x^{-\sigma}$ 的形式。由 (a) 中结论可知，$(x_s^h)^{-\sigma}=\lambda_h p_s/\pi_s$，进一步有

$$\left(\frac{x_s^h}{x_1^h}\right)^{-\sigma}=\frac{p_s\pi_1}{p_1\pi_s}\Longleftrightarrow\frac{x_s^h}{x_1^h}=\left(\frac{p_s\pi_1}{p_1\pi_s}\right)^{-1/\sigma}.$$

上式左端对 h 求和，由等比定律可得

$$\left(\frac{p_s\pi_1}{p_1\pi_s}\right)^{-1/\sigma}=\frac{x_s^h}{x_1^h}=\frac{\sum_h x_s^h}{\sum_h x_1^h}=\frac{\sum_h e_s^h}{\sum_h e_1^h}=\frac{e_s}{e_1}=1.$$

故 $x_s^h=x_1^h$ 对任意 s,h 成立；同时有 $p_s/p_1=\pi_s/\pi_1$，故均衡价格可取为 $p_s=\pi_s>0$。由家庭预算约束可知

$$x_s^h=\sum_t \pi_t x_1^h=\sum_t \pi_t x_t^h=\sum_t \pi_t e_t^h=\mathbb{E}e^h,$$

即每个状态下的最优消费等于家庭各状态禀赋的期望。最后验证市场出清条件：对任意 $s\in S$

$$\sum_h x_s^h=\sum_h\sum_t \pi_t e_t^h=\sum_t \pi_t\sum_h e_t^h=\sum_t \pi_t e_t=e_s\sum_t \pi_t=e_s.$$

此时所有的个体收入（禀赋）风险都得到完全的保险或对冲。（若效用函数均为同样的 CARA 型，也可解出的结论。）

iii. 继续假设经济中没有加总风险。放宽 (b) 中假设为所有家庭具有同样但一般形式的效用函数 $u(x)$，请问 (b) 中得到的均衡还是这个一般的交换经济的 AD 均衡吗？均衡时完全的保险依然成立吗？

解：当价格向量 $p=(\pi_1,\dots,\pi_S)$、均衡消费 $x_s^h=\mathbb{E}e^h$ 时，可选取 $\lambda_h=(\mathbb{E}e^h)^{-\sigma}$，则容易验证 p,x^h,λ_h 满足 (1) 家庭的最优化问题一阶（充分必要）条件以及 (2) 市场出清条件。

4 不完全市场

考虑 Hart (1975) 的动态市场 RE 均衡的例子。假设 $H = K = S = 2$；两商品记为 x, y；两状态概率相等。每个家庭的效用只取决于 $t = 1$ 的消费，用下标表示 (x_{hs}, y_{hs})。家庭 1 在每个状态中的 von Neumann-Morgentern 效用为 $2^{5/2}x_{1s}^{1/2} + 2y_{1s}^{1/2}$，期望效用为

$$U_1 = 2^{3/2}x_{11}^{1/2} + y_{11}^{1/2} + 2^{3/2}x_{12}^{1/2} + y_{12}^{1/2}.$$

家庭 2 的状态效用为 $2x_{2s}^{1/2} + 2^{5/2}y_{2s}^{1/2}$，期望效用为

$$U_2 = x_{21}^{1/2} + 2^{3/2}y_{21}^{1/2} + x_{22}^{1/2} + 2^{3/2}y_{22}^{1/2}.$$

家庭 1 在状态 1、2 中的禀赋分别为 $e_{11} = (5/2, 50/21), e_{12} = (13/21, 1/2)$；家庭 2 在状态 1、2 中的禀赋分别为 $e_{21} = (1/2, 13/21), e_{22} = (50/21, 5/2)$。

a. **解**：以状态 1 为例；简记 x_1, y_1 为家庭 1 的消费；设 $p_x = 1, p_y = p$。家庭 1 的一阶条件为：$2^{0.5}x_1^{-0.5} = \lambda, 0.5y_1^{-0.5} = \lambda p$；可合并为 $y_1 = x_1/(8p^2)$。类似的，对家庭 2 有 $y_2 = 8x_2/p^2$。由 $y_1 + y_2 = 3$，得 $x_1 + 64x_2 = 24p^2$；又由 $x_1 = 3 - x_2$，代入前式替换 x_1 并化简可得 $x_2 = (8p^2 - 1)/21$。家庭 2 的一阶条件又可写为 $py_2 = 8x_2/p$，代入其预算约束 $x_2 + py_2 = 1/2 + p13/21$ 可得 $(1 + 8/p)x_2 = 1/2 + p13/21$；再将该式中的 x_2 用 $x_2 = (8p^2 - 1)/21$ 代换，简化得如下关于 p 的方程：

$$8p^2 + 51p - 8/p - 23/2 = 0.$$

可直接验证 $p = 1/2$ 是该方程的一个根。或者注意到该方程的左边有因式分解

$$(p - 1/2)(8p^2 + 55p + 16)/p,$$

故 $p = 1/2$ 是唯一的大于 0 的根。由 $p = 1/2$，易求得 $x_1 = 62/21, y_1 = 31/21, x_2 = 1/21, y_2 = 32/21$。状态 2 的均衡 $\langle(1, p), (x_h, y_h)_h\rangle = \langle(1, 2), (32/21, 1/21), (31/21, 62/21)\rangle$。

b. **解**：家庭 1、2 的一阶条件如下

$$\begin{aligned} 2^{0.5}x_{11}^{-0.5} &= \lambda_1 p_{x1} \qquad & 0.5x_{21}^{-0.5} &= \lambda_2 p_{x1} \\ 0.5y_{11}^{-0.5} &= \lambda_1 p_{y1} \qquad & 2^{0.5}y_{21}^{-0.5} &= \lambda_2 p_{y1} \\ 2^{0.5}x_{12}^{-0.5} &= \lambda_1 p_{x2} \qquad & 0.5x_{22}^{-0.5} &= \lambda_2 p_{x2} \\ 0.5y_{12}^{-0.5} &= \lambda_1 p_{y2} \qquad & 2^{0.5}y_{22}^{-0.5} &= \lambda_2 p_{y2} \end{aligned}$$

由第一行和第三行可得：

$$\frac{x_{11}}{x_{21}} = \left(\frac{p_{x1}}{p_{x2}}\right)^{-2} = \frac{x_{21}}{x_{22}} \Longrightarrow \frac{x_{11}}{x_{21}} = \frac{x_{21}}{x_{22}} = \frac{x_{11} + x_{21}}{x_{12} + x_{22}} = \frac{3}{3} = 1.$$

故 $x_{11} = x_{21}, x_{21} = x_{22}$，并且 $p_{x1} = p_{x2}$。类似可得 $y_{11} = y_{21}, y_{21} = y_{22}$，并且 $p_{y1} = p_{y2}$。不妨设 $p_{x1} = 1, p_{y1} = p$，则由类似于 (1) 中的方法可解得 $p = 1$；不同之处在于此时家庭 2 的预算约束为

$$2(x_{21} + py_{21}) = 1/2 + p13/21 + 50/21 + p5/2,$$

以及最后关于 p 的方程为

$$16p^2 + p125/2 - 125/2 - 16/p = (p - 1)[16(p^2 + p + 1)/p + 125/2] = 0.$$

显然，$p = 1$ 是该方程唯一的非负根。简单计算可知均衡配置为

$$(x_{11}, y_{11}) = (x_{12}, y_{12}) = (8/3, 1/3),$$
$$(x_{21}, y_{21}) = (x_{22}, y_{22}) = (1/3, 8/3).$$

c. **解**：由 $w_{hs} = p_{xs}(x_{hs} - e_{xhs}) + p_{ys}(y_{hs} - e_{yhs})$ 可得 AD 均衡对应的财富转移向量为

$$w_1 = (-79/42, 79/42)^{\intercal}, \quad w_2 = (79/42, -79/42)^{\intercal}.$$

第一种证券结构下，RE、AD 均衡价格对应的价值矩阵分别为

$$V^{RE} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad V^{AD} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

对应于 (1) 中 RE 均衡价格向量，由于 V^{RE} 可逆，故存在 z_h 满足 $w_h = V^{RE} z_h$；对应于 (2) 中的 AD 均衡，由于 V^{AD} 不可逆且 w_h 两项符号相反，故不存在 z_h 满足 $w_h = V^{AD} z_h$。

第二种证券结构下，

$$V^{RE} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad V^{AD} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

对前者，不存在满足条件的 z_h；但对后者存在。**另外注明**：给定 RE 均衡价格（两个状态分别的价格向量）时，V^{RE} 的两行是成比例的。对 h 的任意投资组合 z_h，其在状态 1 中的支付总额为 $z_{h1} + z_{h2}$，在状态 2 中的支付总额为 $2(z_{h1} + z_{h2})$。两个支付总额只能同时为正或同时为负。由于 h 不会选择 z_h 使得两个状态中的支付总额为负值，所以 h 会选择的 z_h 一定满足 $V^{RE} z_h \geq 0$。由证券市场出清条件 $z_1 + z_2 = 0$，有 $V^{RE}(z_1 + z_2) = 0$。两个非负向量的和为 0 向量，所以一定有 $V^{RE} z_h = 0$。

5 信息效率可能性

仔细阅读 Grossman and Stiglitz (1980)。

a. 请写出 $\lambda > 0$ 时均衡价格函数 $P^*_\lambda(\theta, x) = \alpha_1 + \alpha_2 w_\lambda(\theta, x)$ 中常数 α_1, α_2 的表达式，验证 $\alpha_2 > 0$ 并讨论 α_2 对 λ 的依赖性质（参考 II.G 中的表达式 m, n）。

b. 请验证 $P^*_\lambda(\theta, x)$ 满足市场出清条件。

c. 请依次验证 II.H 中比较静态的结论，以及 II.I 1)、2) 中均衡性质的结论。

d. 给定均衡价格函数 $P^*(\theta, x)$，不考虑信息获取成本 c 且假定初始财富相等，请计算 I-和 U-交易者的均衡期望效用，并比较大小。

e. 请验证课件定理 2 中的表达式

$$\frac{\mathbb{E}V(W^\lambda_{Ii})}{\mathbb{E}V(W^\lambda_{Ui})} = e^{ac}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(u|\theta)}{\mathrm{var}(u|w_\lambda)}}.$$

解答：

a. 由 theorem 1 的证明 (Appendix B - A10) 可得价格 $P_\lambda(\theta,x)$ 的一般形式

$$P_\lambda(\theta,x)=\frac{\frac{\lambda\omega_\lambda}{a\sigma_\varepsilon^2}+\frac{(1-\lambda)\mathbb{E}[u^*|\omega_\lambda]}{a\mathrm{var}[u^*|\omega_\lambda]}-\mathbb{E}X^*}{R\left[\frac{\lambda}{a\sigma_\varepsilon^2}+\frac{(1-\lambda)}{a\mathrm{var}[u^*|\omega_\lambda]}\right]} \tag{3}$$

将上式整理成 $P_\lambda(\theta,x)=\alpha_1+\alpha_2\omega_\lambda$ 的形式，可整理出 α_1,α_2 的表达式如下

$$\alpha_1=\frac{\frac{(1-\lambda)\mathbb{E}[u^*|\omega_\lambda]}{a\mathrm{var}[u^*|\omega_\lambda]}-\mathbb{E}X^*}{R\left[\frac{\lambda}{a\sigma_\varepsilon^2}+\frac{(1-\lambda)}{a\mathrm{var}[u^*|\omega_\lambda]}\right]}\qquad \alpha_2=\frac{\frac{\lambda}{a\sigma_\varepsilon^2}}{R\left[\frac{\lambda}{a\sigma_\varepsilon^2}+\frac{(1-\lambda)}{a\mathrm{var}[u^*|\omega_\lambda]}\right]}$$

上式中 α_2 显然大于 0 。对 α_2 进一步变换有

$$\alpha_2=\frac{1}{R\left[1+\frac{(1-\lambda)\sigma_\varepsilon^2}{\lambda\mathrm{var}[u^*|\omega_\lambda]}\right]}$$

根据上式，存在关系 $\lambda\uparrow\Rightarrow\frac{(1-\lambda)\sigma_\varepsilon^2}{\lambda\mathrm{var}[u^*|\omega_\lambda]}\downarrow\Rightarrow\alpha_2\uparrow$ 。

b. 同样根据 theorem 1 的证明可验证 $P_\lambda^*(\theta,x)$ 满足市场出清条件。其中市场出清条件为

$$\lambda X_I(P_\lambda^*(\theta,x);\theta)+(1-\lambda)X_U(P_\lambda^*(\theta,x);P_\lambda^*)=x$$

1. 当 $\lambda=0$ 时，出清条件为 $X_U=x$ ，则可由 $X_U=\frac{E[u|P^*(\theta,x)=P]-RP}{a\mathrm{var}[u|P^*(\theta,x)=p]}$ 反推出价格 $P(\theta,x)=\frac{\mathbb{E}\theta^*-ax\sigma_u^2}{R}$ 。在原文中，作者定义上述价格，然后代入 X_U 的表达式，得到 $X_U=x$ 满足出清条件。
2. 当 $\lambda>0$ 时，P 的表达式为式 (1) 。由于 $\lambda\neq 0$ ，则 $\omega_\lambda=\theta-\frac{a\sigma_\varepsilon^2}{\lambda}(x-\mathbb{E}x)$ 。将 X_I,X_U 的详细表达式代入出清条件，则证明其成立即证明

$$\lambda\frac{\theta-RP_\lambda}{a\sigma_\varepsilon^2}+(1-\lambda)\frac{\mathbb{E}(u^*|\omega_\lambda)-RP_\lambda}{a\mathrm{var}[u^*|\omega_\lambda]}$$

是否与 x 相等。将 P 的一般表达式代入上式，得到

$$\lambda\frac{\theta-RP_\lambda}{a\sigma_\varepsilon^2}+(1-\lambda)\frac{\mathbb{E}(u^*|\omega_\lambda)-RP_\lambda}{a\mathrm{var}[u^*|\omega_\lambda]}=x$$

故满足出清条件。

c. 比较静态结果在文中被归纳为 theorem 4 ，现依次验证其 A,B,C,D 项

A. 均衡下价格信息含量可表示为 P 与 θ 的相关系数，则由正文推导有 $\rho_\theta^2=1-\frac{\rho^{2ac}-1}{n}$ ，从而可知 $a\downarrow,c\downarrow,n\uparrow$ 时 $\rho_\theta^2\uparrow$ ，A 成立。

B. 知

$$\frac{\mathbb{E}V(\omega_{Ii}^\lambda)}{\mathbb{E}V(\omega_{Ui}^\lambda)}=e^{ac}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(u|\theta)}{\mathrm{var}(u|\omega_\lambda)}}=r(\lambda)$$

其中 $\frac{\mathrm{var}(u^*|\theta)}{\mathrm{var}(u^*|\omega_\lambda)}=\left(1+\frac{nm}{1+m}\right)^{-1}=\left(1+\frac{n}{1+\frac{1}{m}}\right)^{-1},m=\left(\frac{a\sigma_\varepsilon^2}{\lambda}\right)^2\frac{\sigma_x^2}{\sigma_\theta^2},n=\frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_\varepsilon^2}$ 。现有 $\sigma_x^2\uparrow\Rightarrow m\uparrow\Rightarrow\frac{\mathrm{var}(u^*|\theta)}{\mathrm{var}(u^*|\omega_\lambda)}\downarrow$，在 λ 与 $\frac{\mathbb{E}V(\omega_{Ii}^\lambda)}{\mathbb{E}V(\omega_{Ui}^\lambda)}$ 的分布图上表现为曲线下移 (图请参照附件) 。在

均衡时，$\frac{\mathbb{E}V(\omega_I^\lambda)}{\mathbb{E}V(\omega_U^\lambda)}=1$，无论 σ_x^2 如何变化，该值固定，而 λ^e 的上升低效了 x 的波动影响，均衡结果中价格系统的信息含量不变。

同样，当 $\sigma_\varepsilon^2\uparrow\Rightarrow\sigma_u^2\uparrow$，若想保持 n 不变则需 σ_θ^2 同比例增加，由 m 的表达式知，当 $\sigma_\varepsilon^2,\sigma_\theta^2$ 同比例增加时，$m\uparrow$，其证明与上述情况相同，最终均衡时价格系统信息含量不变。

C. 由 B 的证明可知 (i) $\sigma_x^2\uparrow,\lambda^e\uparrow$ (ii) $\sigma_\varepsilon^2,\sigma_\theta^2$ 同比例增加 $\Rightarrow\lambda^e\uparrow$。又由 $m=\frac{e^{2ac}-1}{1+n-e^{2ac}}$ 知，$c\downarrow\Rightarrow m\uparrow$ (因为 $e^{2ac}-1$ 与 $1+n-e^{2ac}$ 反向变动)，则后续证明过程与 B 一样，可证 $\lambda^e\uparrow$。

D. 结合符号函数性质知

$$\frac{\partial\frac{nm}{1+m}}{\partial\sigma_\theta^2}=\operatorname{sgn}\left[\left(\frac{r}{n-r}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]$$

其中 $r=e^{2ac}-1$，并定义 $\operatorname{sgn}(\cdot)=\{-1,1\}$。根据上式知，当 n 足够大时，$\left(\frac{r}{n-r}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)-1<0,\operatorname{sgn}[\cdot]=-1$。因此，当 $\frac{r}{n-r}<\frac{n}{n+1}$ 时，$\frac{\partial\frac{nm}{1+m}}{\partial\sigma_\theta^2}<0\Rightarrow\frac{\operatorname{var}(u^*|\theta)}{\operatorname{var}(u^*|\omega_\lambda)}\uparrow$。进一步，通过 B 的证明知 $\frac{\operatorname{var}(u^*|\theta)}{\operatorname{var}(u^*|\omega_\lambda)}$ 与 λ^e 反向变动，故 D 得证。(由 $\frac{\operatorname{var}(u^*|\theta)}{\operatorname{var}(u^*|\omega_\lambda)}=\frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_\theta^2+\sigma_\varepsilon^2}$ 的关系同样可验证 D 成立)

d. 结合原文公式 (12a) (12b) 可知，在给定均衡价格 $P^*(\theta,x)$ 以及令 $c=0$ 后，$\mathbb{E}V(W_{Ii}^\lambda)=\mathbb{E}V(W_{Ui}^\lambda)$。

e. 由 (A20) (A25) 可知

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[V(W_{Ii}^\lambda)|P_\lambda,\bar{X}_i]&=\mathbb{E}[V(W_{Ii}^\lambda)|\omega_\lambda,\bar{X}_i]\\&=e^{ac}V(RW_{0i})\sqrt{\frac{\operatorname{var}(u^*|\theta)}{\operatorname{var}(u^*|\omega_\lambda)}}\cdot\exp\left(\frac{-(\mathbb{E}(u^*|\omega_\lambda)-RP_\lambda)^2}{2\operatorname{var}(u^*|\omega_\lambda)}\right)\end{aligned}$$

由式 (A26) 知

$$\mathbb{E}[V(W_{Ui}^\lambda)|\omega_\lambda,\bar{X}_i]=V(RW_{0i})\sqrt{\frac{\operatorname{var}(u^*|\theta)}{\operatorname{var}(u^*|\omega_\lambda)}}\cdot\exp\left(\frac{-(\mathbb{E}(u^*|\omega_\lambda)-RP_\lambda)^2}{2\operatorname{var}(u^*|\omega_\lambda)}\right)$$

令上述两式相减，得到

$$\mathbb{E}[V(W_{Ii}^\lambda)|\omega_\lambda,\bar{X}_i]-\mathbb{E}[V(W_{Ui}^\lambda)|\omega_\lambda,\bar{X}_i]=\mathbb{E}[V(W_{Ui}^\lambda)|\omega_\lambda,\bar{X}_i]\cdot\left[e^{ac}\sqrt{\frac{\operatorname{var}(u^*|\theta)}{\operatorname{var}(u^*|\omega_\lambda)}}-1\right]$$

令上式两边同时取期望并除以 $\mathbb{E}[V(W_{Ui}^\lambda)|\omega_\lambda,\bar{X}_i]$，化简后得到

$$\frac{\mathbb{E}V(W_{Ii}^\lambda)}{\mathbb{E}V(W_{Ui}^\lambda)}=e^{ac}\sqrt{\frac{\operatorname{var}(u^*|\theta)}{\operatorname{var}(u^*|\omega_\lambda)}}$$

6 混合策略 Nash 均衡

考虑如下 2×2 策略形式博弈（左、右数字是 P1、P2 的收益）

		P2 L	P2 R
P1	U	$a,0$	$0,b$
	D	$0,c$	$d,0$

其中 a,b,d 和 d 均严格大于 0。

a. 请说明该博弈没有纯策略 Nash 均衡。

b. 请说明该博弈只有唯一的混合策略 Nash 均衡 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)$，并计算之。

e. 验证如下事实：给定对手 $-i$ 的策略 σ_{-i}，则参与者 i 以严格正概率选择的任一纯策略都产生相同的收益。

d. 上述结论在一般的有限正规形式博弈 $\Gamma=\langle I,(u_i,S_i)_{i\in I}\rangle$ 中也成立：给定所有 $S_i=\{1,\ldots,S_i\}$ 为有限集，若 $\sigma=(\sigma_i)_{i\in I}$ 是 Γ 的一个 Nash 均衡，则对任意的 i，若 $\sigma_i(n),\sigma_i(m)>0$，$n,m\in S_i$，且所有对手选择均衡策略 $\sigma_{-i}=(\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},\ldots,\sigma_I)$ 不变，那么 i 选择 n 时得到的期望效用等于选择 m 时得到的期望效用。试证明该结论。

证明：（反证法）假设 i 选择 n 时得到的期望效用低于选择 m 时得到的期望效用，那么 i 可以 $\sigma_i(n)+\sigma_i(m)$ 的概率选择 m，把选择 n 的概率降为 0，从而提高最终的期望效用。这与 $\sigma=(\sigma_i)_{i\in I}$ 是 Γ 的一个 Nash 均衡相矛盾，故原假设不成立。

7 Spence 教育信号模型

考虑两种类型的工人，生产率 $k=1$ 或 2，效用函数为 $u_k(w,e)=w-\theta_k g(e)$，其中 $\theta_1>\theta_2$，$g(e)$ 为 2-阶连续可微严格递增、严格凸函数，满足 $g'(0)$ 充分小。高、低生产率员工的比例为 $1-\pi>0$ 和 $\pi>0$。工人先选择各自的教育程度 e_k，随后两家企业根据观察到的受教育程度，以及各个教育程度中低技能员工比例的信念 $\mu(e)$，支付竞争性的工资 $w(e)$。生产率为 k、教育程度为 e 的工人可以为企业带来的价值为 ke。

a. **单交性**（single crossing property） 假设 $f(x,\theta):\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2-阶连续可微，$\partial^2 f/\partial x\partial\theta\geq 0$ 且对任意 x 该二阶导关于 θ 不恒为 0。(i) 请证明，对任意的 $\theta_1>\theta_2$，$f(x,\theta_1)$ 与 $f(x,\theta_2)$ 至多交于一点。(ii) 请验证 $u(w,e,\theta)=w-\theta g(e)$ 的无差异曲线（表示为 e,θ 的函数）满足单交性条件。

b. 假设类型为 k 的工人中选择教育程度 e 的比例为 $\sigma_k(e)$，且 $\sigma_1(e)+\sigma_2(e)>0$（即两者中至少一个严格大于 0）。(i) 按照 Nash 均衡的定义，两家企业是否知道 $\sigma_k(e)$ 的值？(ii) 此时两家企业关于 e 处两类工人占比的信念取值如何？(iii) 序贯理性要求两家企业支付的工资率是多少，以及该工资率是否唯一（请详细说明理由）？

c. 考虑一个合并均衡 $e^*>0$。(i) 均衡工资是多少？(ii) 画图说明什么样的工资函数 $w(e)$ 能够让两类工人自愿选择 e^*。(iii) 给定任一满足条件的工资函数 $\hat{w}(e)$，请计算对应的信念系统 $\hat{\mu}(e)$。

d. 假设备选的 $N+1\geq 2$ 个教育程度为 $E=\{e_0,e_1,\ldots,e_N\}$；特别地，令 $e_0=e^*$。(i) 请说明，在任一序贯均衡中，均衡信念系统 $\mu(e)$ 对应的工资函数满足 $e\leq w(e)\leq 2e$。(ii) 若通过上述合并均衡点 e^* 的低生产率工人无差异与直线 $w=e$ 相交（不是相切），请说明 e^* 点不是序贯均衡。(iii) 假设 (ii) 中情况不出现，请详细说明 e^* 确实可以成为一个序贯均衡；为此，请构造恰当的完全混合策略和信念组序列 $(\sigma_1^\varepsilon,\sigma_2^\varepsilon,\{\mu^\varepsilon(e)\}_{e\in E})$，满足 $\sigma_k^\varepsilon(e)>0\;\forall e\in E$，使得当 $\varepsilon\to 0$ 时该序列收敛到均衡策略与信念组 $(\sigma_1,\sigma_2,\hat{\mu}(\cdot))$，其中 $\sigma_1(e^*)=\sigma_2(e^*)=1$，$\hat{\mu}(e^*)=\pi$。

解：(i) 任何受教育水平 e 处的信念满足 $\mu(e)\in[0,1]$，由工资函数可知 $w(e)=\mu(e)e+2(1-\mu(e))e\in[e,2e]$。(ii) 若通过 e^* 点处 1-类员工的无差异曲线与 $w=e$ 相交于 $e_a<e_b$

两点，则该类员工严格偏好选择 (e_a, e_b) 中的某一点 e_d（总假设 E 包含点 e_d），因为该点出工资不小于 e_d，可严格提高 1-类员工的效用。(iii) 这里的关键在于要让均衡信念系统 $\mu(e), e \in E$ 诱导的工资线 $w(e)$ 不出现 (ii) 中的情况。具体的构造如下：假设 $w(e)$ 满足要求，则把均衡信念定义为 $w(e) = \mu(e)e + 2(1-\mu(e))e$ 的解

$$\mu(e) = 2 - w(e)/e, \quad e \in E.$$

再构造合适的 $(\sigma_1^\varepsilon, \sigma_2^\varepsilon)$ 使得混合策略诱导的信念系统为 $\mu(e)$。为此，取充分小正数 $\varepsilon > 0$，对 $e = e_1, \ldots, e_N$，令

$$\sigma_1^\varepsilon(e) = (\mu(e) + \varepsilon)(1-\pi)\varepsilon, \quad \sigma_2^\varepsilon = (1 - \mu(e) - \varepsilon)\pi\varepsilon$$

以保证 $\sigma_k^\varepsilon \in (0,1)$ 且满足

$$\mu^\varepsilon(e) = \frac{\pi\sigma_1^\varepsilon(e)}{\pi\sigma_1^\varepsilon(e) + (1-\pi)\sigma_2^\varepsilon(e)} \to \mu(e), \quad \varepsilon \to 0.$$

此外令 $\sigma_k^\varepsilon(e_0) = 1 - \sum_{i\neq 0}\sigma_k^\varepsilon(e_i)$，则自然有 $\lim_{\varepsilon\to 0}\mu^\varepsilon(e_0) = \mu(e_0) = \pi$。

e. 下面考虑分离均衡 $e_l \neq e_h$，即低生产率员工选择 e_l 而高生产率员工选择 e_h。(i) 请说明（用反证法）任何序贯均衡中 e_l 一定是 $\max_x u_1(x,x)$ 的解，即 e_l 一定是 1-类员工无差异曲线与低工资线 $w = e$ 的切点。(ii) 将过 e_l 的低生产率员工无差异曲线与 $w = 2e$ 的交点记为 e_0，请说明序贯均衡中 $e_h \geq e_0$。(iii) 请画图说明什么样的工资曲线 $w(e)$，即信念系统 $\mu(e)$，可以保证 (e_l, e_h) 的确构成一个分离均衡？(iv) 请说明 Riley 结果 (e_l^*, e_h^*) 是唯一满足直观准则的分离均衡结果，其中 e_l^* 就是 (i) 中的 e_l，e_h^* 是 $\max_x u_2(2x,x)$ s.t. $x \geq e_0$ 的解；换言之，如果有另一个分离均衡 (e_l, e_h)，其中 $e_h \neq e_h^*$，则该均衡不满足直观准则。

f. **均衡的福利/效率性质** Spence 模型中可以定义 Pareto 有效配置。先定义可行配置：给定两类员工 N 个可能的教育选择 $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$，以及每个 e_i 处对应的员工比例 $\mu(e_i)$，企业在 e_i 出支付的工资需满足 $w(e_i) \leq \mu(e_i) + (1-\mu(e_i))\cdot 2e$。（此处员工的教育选择也可写为 $\sigma_k(e_i)$，即选择每个教育程度的 k-类员工比例，再计算相应的 $\mu(e_i)$。）Pareto 有效配置：给定配置 $\{(e_i, \mu_i, w_i) : i = 1, \ldots, N\}$，不存在另一可行配置使得至少一类员工的效用严格增加而另一类员工的效用不变。(i) 如果通过 Riley 结果中 e_h^* 点的高生产率员工无差异曲线与高工资线 $w = 2e$ 相切于 e_h^* 点，请说明对应的配置为 Pareto 最优。(ii) 如果通过 e_h^* 点的高生产率员工无差异与 $w = 2e$ 相交（穿过到工资线下方），且 π 足够小使得平均工资线 $w = \pi e + 2(1-\pi)e$ 与该无差异曲线相交（允许相切），请说明此时的 Riley 结果不是 Pareto 最优。

8 LP 模型

考虑课件中的 Leland-Pyle 模型。

a. 请验证下列逻辑关系

$$\frac{p_G(1-\bar{p})}{\bar{p}(1-p_G)} > \frac{u'(0)}{u'(C^H)} \Leftrightarrow \partial_\alpha U(1, \bar{p}C^H|p_G) > 0 \Rightarrow \partial_\alpha U(\alpha, \bar{p}C^H|p_G) > 0, \ \forall\alpha.$$

b. 请验证下列不等式 $\partial_\alpha U(\alpha, p_B C^H|p_G) > 0, \partial_\alpha U(\alpha, p_G C^H|p_G) < 0, \partial_\alpha U(\alpha, p_G C^H|p_B) < 0, \ \forall\alpha$，以及 $U(0, p_G C^H|p_B) > U(0, p_B C^H|p_B) > U(1, p_G C^H|p_B)$。

c. 请证明唯一满足直观准则的分离均衡为 $\alpha_G = \alpha^*, \alpha_B = 0$。

9 Stiglitz-Weiss 模型

阅读 Stiglitz & Weiss (1981) 和 Arnold & Riley (2009)。

a. 请证明：$\mathbb{E}[\pi(R,r)|\theta] \uparrow \theta, \hat{\theta}(r) \uparrow r, \tilde{\rho}(\theta,r) = \mathbb{E}[\rho(R,r)|\theta] \downarrow \theta$。

b. 请验证下列导数表达式：

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}}{\mathrm{d}r} = -\frac{g(\hat{\theta})}{1-G(\hat{\theta})}(\hat{\rho}-\bar{\rho})\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{1-G(\hat{\theta})}\int_{\hat{\theta}}^{\infty}[1-F((1+r)B-C,\theta)]\mathrm{d}G(\theta),$$

并讨论 $\hat{\rho}$ 和 $\bar{\rho}$ 的大小关系。

10 最优激励合约

假设 $F(q|a)$ 关于 a 满足一阶随机占优。最优激励合约（即次优合约，second best contract）满足如下关于 $w(p)$ 的一阶条件

$$\frac{V'(q-w(q))}{u'(w(q))} = \lambda + \mu\frac{f_a(q|a)}{f(q|a)}.$$

a. 比较 $w(q)$ 与最优合约（first best contract）$w_*(q)$ 的大小关系。

b. 假设密度函数 $f(q|a)$ 处处大于 0，关于 q,a 2-阶连续可微，且 $f_a(q|a)/f(q|a)$ 关于 q 递增（不恒为常数）。请证明：当 $p>r$ 且 $a>b$ 时，有下述不等式

$$\frac{f(p|a)}{f(p|b)} > \frac{f(r|a)}{f(r|b)}$$

成立。该式称为单调似然比（monotone likelihood ratio，MLR）性质：更高的观测值 p 意味着高低状态 a,b 之间更高的似然比。

证明：由 $0 \le \partial_q[f_q(q|a)/f(q|a)] = \partial_q\partial_a \log(f(q|a)) = \partial_a\partial_q \log(f(q|a))$ 且不恒为常数可知，当 $a>b$ 时有

$$\partial_q \log(f(q|a)) > \partial_q \log(f(q|b)).$$

在 $q\in[r,p]$ 上对上式两端积分，可得

$$\log(f(p|a)) - \log(f(r|a)) > \log(f(p|b)) - \log(f(r|b))$$
$$\Leftrightarrow \log(f(p|a)/f(r|a)) > \log(f(p|b) - f(r|b)),$$

由对数的单调性既得所证。

c. 从 MLR 出发，证明当 $a>b$ 时，$F(q|a)<F(q|b)$；换言之，MLR 意味着一阶随机占优；可参考 Milgrom (1981, BJE)。

证明：给定 q，对 $p>q$ 由上问可知 $f(p|a)/f(q|a) > f(p|b)/f(q|b)$，两端对 $p>q$ 积分可知

$$\frac{1-F(q|a)}{f(q|a)} > \frac{1-F(q|b)}{f(q|b)}.$$

类似的，对 $r<q$ 有 $f(r|a)/f(q|a) < f(r|b)/f(q|b)$，故

$$F(q|a)/f(q|a) < F(q|b)/f(q|b).$$

两式合并可知

$$\frac{1-F(q|a)}{1-F(q|b)} > \frac{F(q|a)}{F(q|b)},$$

化简既得所正。

d. 假设 $f(q|a)$ 满足 MLR，讨论此时 $w(q)$ 和 $w_*(q)$ 的大小关系。

解：当 $\mu = 0$ 时，$w(q) = w_*(q)$。当 $\mu > 0$ 时，若存在 $q_0 = 0$ 使得 $f_a(q_0|a) = 0$，则 $q = q_0$ 时，$w(q) = w_*(q)$；$q > q_0$ 时，$w(q) > w_*(q)$；$q < q_0$ 时，$w(q) < w_*(q)$。

11 激励合约示例

本题基于 Holmström (1979) sec. 2 的例子 p. 79。假设 $V(q-w) = q-w$，$u(w) = 2\sqrt{w}$，$\phi(a) = a^2$; 给定 $a > 0$, 产出 $q \in [0,\infty)$ 满足指数分布 $\exp(1/a)$, 其密度函数为 $f(q|a) = \frac{1}{a}e^{-q/a}$，分布函数为 $F(q|a) = 1 - e^{-q/a}$，$q \geq 0$。激励合约设计问题的原初形式 (P*) 和一阶方法形式 (P)。

a. 请验证 $\mathbb{E}q = a, \mathbb{E}q^2 = 2a^2, \mathrm{var}q = a^2$。

b. 请写出委托人激励合约设计问题的原初形式 $(P^\star)$ 和一阶方法形式 (P)。

c&d. 对于委托人最优化问题 (P)，请推导关于 $w(q)$ 的一阶条件，并验证激励合约满足

$$w(q) = \left(\lambda + \mu\frac{q-a}{a^2}\right)^2.$$

解：$\log f(x|a) = -\log a - x/a \Rightarrow f_a/f = \partial_a \log f(x|a) = (x-a)/a^2$，故有 $s(x)^{\frac{1}{2}} = \lambda + \mu(x-a)/a^2$。

e. 请计算 (P) 中一阶形式激励约束

$$\int_0^\infty u(w(q)) f_a(q|a)\mathrm{d}q = \phi'(a)$$

左端的积分并验证 $\mu = a^3$。一个简单的方法是使用分部积分并注意利用 (1) 中的结论。

解：利用 $u'(w(q))w'(q) = [\lambda + \mu(q-a)/a^2]^{-1}[\lambda + \mu(q-a)/a^2]2\mu/a^2 = 2\mu/a^2$ 及分部积分可得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty u(w(q)) f_a(q|a)\mathrm{d}q &= -\int_0^\infty u'(w(q))w'(q)F_a(q|a)\mathrm{d}q \\ &= \int_0^\infty 2\frac{\mu}{a^2}\frac{q}{a^2}e^{-q/a}\mathrm{d}q \\ &= 2\frac{\mu}{a^3}\int_0^\infty \frac{q}{a}e^{-q/a}\mathrm{d}q = 2\frac{\mu}{a^3}\mathbb{E}q = 2\mu/a^2,\end{aligned}$$

而 $\phi'(a) = 2a$，故 $\mu = a^3$。

f. 请验证当 $w(q)$ 为 (4) 中形式时，代理人效用函数（作为 a 的函数）

$$\int_0^\infty u(w(q)) f(q|a)\mathrm{d}q - \phi(a)$$

是一个严格凹函数；再说明由 (P) 中一阶形式激励约束确定的代理人最优选择 a 是给定 $w(q)$ 下的全局最大值点，从而 (P) 与 (P*) 等价。

解：$\mathbb{E}q = a$ 意味着 $\int_0^\infty (q-a)f(q|a)\mathrm{d}q = 0$，再注意到 $\mu = a^3$，可知

$$\begin{aligned}\int_0^\infty u(w(q))f(q|a)\mathrm{d}q - \phi(a) &= \int_0^\infty 2(\lambda + a(q-a))f(q|a)\mathrm{d}q - \phi(a)\\ &= 2\lambda + 2a\int_0^\infty (q-a)f(q|a)\mathrm{d}q - a^2 = 2\lambda - a^2.\end{aligned}$$

g. 请验证委托人问题 (P) 中关于 a 的一阶最优条件满足

$$\int_0^\infty V(q-w(q))f_a(q|a)\mathrm{d}q + \mu\left[\int_0^\infty u(w(q))f_{aa}(q|a)\mathrm{d}q - \phi''(a)\right] = 0.$$

请计算上式中的两个积分，并验证 $4a^3 + 2\lambda a = 1$。(5) 中的提示同样适用。

解：先计算第二个积分。注意到 $F_{aa}(q|a) = (2q/a^2 - q^2/a^3)\frac{1}{a}e^{-q/a}$，再由分部积分得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty u(w(q))f_{aa}(q|a)\mathrm{d}q &= -\int_0^\infty u'(w(q))w'(q)F_{aa}(q|a)\mathrm{d}q\\ &= 2a\int_0^\infty \left(\frac{q^2}{a^3} - \frac{2q}{a^2}\right)\frac{1}{a}e^{-q/a}\mathrm{d}q\\ &= 2a(a^{-3}\mathbb{E}q^2 - 2a^{-2}\mathbb{E}q) = 2a(2a^{-1} - 2a^{-1}) = 0.\end{aligned}$$

对第一个积分，由分部积分得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty V(q-w(q))f_a(q|a)\mathrm{d}q &= \int_0^\infty [1 - 2a(\lambda + a(q-a))]\frac{q}{a^2}e^{-q/a}\mathrm{d}q\\ &= a^{-1}\mathbb{E}q - 2\lambda\mathbb{E}q - 2a\mathbb{E}q^2 + 2a^2\mathbb{E}q\\ &= 1 - 2a\lambda - 4a^3 + 2a^3 = 1 - 2a\lambda - 2a^3.\end{aligned}$$

h. 当保留效用（reservation utility）$\bar{u} \geq 0$ 时，请由 (6) 验证最优解对应的 $\lambda > 0$。假设 $\bar{u} = \frac{3}{4}$，请求解相应的 λ, μ, a 以及 $w(q)$。

解：由 $2\lambda - a^2 = \frac{3}{4}$ 及 $4a^3 + 2\lambda a = 1$ 可解得 $\lambda = a = \frac{1}{2}$。

i. 计算上述问题对应的第一最优合约 $w_*(q)$，并讨论 $w_*(q)$ 和 $w(q)$ 的关系。验证 $f(q|a)$ 满足 MLR 性质；第 10 题 4 中的结论在此例中成立吗?