2023 秋季高级微观经济学

第 1 次作业答案

10 月 10 日

1. 考虑如下定义在 $\mathbb{R}^K_{++}$ 上的 CES (constant elasticity of substitution) 函数：

$$U(x) = \left(\alpha_1 x_1^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \cdots + \alpha_K x_k^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}, \qquad \varepsilon \geq 0,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_K > 0,\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_K = 1.$$

解答下列问题。

(a) 求出下列 ε 极限取值时，$U(x)$ 的函数形式：

$$\lim_{\varepsilon\to 1} U(x), \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} U(x), \qquad \lim_{\varepsilon\to +\infty} U(x).$$

令 $\sigma = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$，则有

$$\lim_{\varepsilon\to 1}\sigma = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\sigma = -\infty, \qquad \lim_{\varepsilon\to +\infty}\sigma = 1$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\sigma\to 0}\left(\alpha_1 x_1^\sigma + \cdots + \alpha_K x_k^\sigma\right)^{\frac{1}{\sigma}} &= e^{\lim_{\sigma\to 0}\frac{\ln\left(\alpha_1 x_1^\sigma + \cdots + \alpha_K x_k^\sigma\right)}{\sigma}} \\
&= e^{\lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{\left(\alpha_1 x_1^\sigma + \cdots + \alpha_K x_k^\sigma\right)}\left(\alpha_1 x_1^\sigma \ln x_1 + \cdots + \alpha_K x_k^\sigma \ln x_k\right)} \\
&= \prod_{i=1}^{k} x_i^{\alpha_i}
\end{aligned}$$

同上：

$$\lim_{\sigma\to -\infty}\left(\alpha_1 x_1^\sigma + \cdots + \alpha_K x_k^\sigma\right)^{\frac{1}{\sigma}} = e^{\lim_{\sigma\to -\infty}\frac{1}{\left(\alpha_1 x_1^\sigma + \cdots + \alpha_K x_k^\sigma\right)}\left(\alpha_1 x_1^\sigma \ln x_1 + \cdots + \alpha_K x_k^\sigma \ln x_k\right)}$$

令 $x_m = \min\{x_1, \cdots, x_k\}$：

$$\begin{aligned}
\lim_{\sigma\to -\infty}\frac{\alpha_1 x_1^\sigma \ln x_1 + \cdots + \alpha_K x_k^\sigma \ln x_k}{\left(\alpha_1 x_1^\sigma + \cdots + \alpha_K x_k^\sigma\right)} &= \lim_{\sigma\to -\infty}\frac{\alpha_1 (x_1/x_m)^\sigma \ln x_1 + \cdots + \alpha_K (x_k/x_m)^\sigma \ln x_k}{\left(\alpha_1 (x_1/x_m)^\sigma + \cdots + \alpha_K (x_k/x_m)^\sigma\right)} \\
&= \ln x_m
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{\sigma\to -\infty}\left(\alpha_1 x_1^\sigma + \cdots + \alpha_K x_k^\sigma\right)^{\frac{1}{\sigma}} = x_m$$

$$\lim_{\sigma\to 1}\left(\alpha_1 x_1^\sigma + \cdots + \alpha_K x_k^\sigma\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i$$

(b) 以下考虑 $\varepsilon > 0$ 且有限的情形。请证明 $U(x)$ 是一次齐次函数，关于所有 x_k 递增，且满足 Inada 条件。

$$\begin{aligned} U(ax) &= \left(\alpha_1 a x_1^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \cdots + \alpha_K a x_k^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \\ &= aU(x) \end{aligned}$$

因此，$U(x)$ 是一次齐次函数。

由于 $x \in \mathbb{R}_{++}^K$:

$$\begin{aligned} U_{x_k} &= \alpha_k x_k^{-\frac{1}{\varepsilon}} \left(\alpha_1 x_1^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \cdots + \alpha_K x_k^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}-1} \\ &= \alpha_k \left(\frac{U(x)}{x_k}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \\ &> 0 \end{aligned}$$

$U(x)$ 关于所有 x_k 递增。

接下来，验证 Inada 条件：利用 $k = 2$ 的情形，即 $U(x) = \left(\alpha_1 x_1^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \alpha_2 x_2^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$

$$\begin{aligned} U_{x_2} &= \alpha_2 \left(\frac{U(x)}{x_2}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \\ \frac{U(x)}{x_2} &= \left(\alpha_1 \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \alpha_2\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \end{aligned}$$

对于 U_{x_2} 的极限，等价于讨论 $\frac{U(x)}{x_2}$ 的极限：

情形 1：$\varepsilon < 1$

$$\lim_{x_k \to 0^+} \left(\alpha_1 \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \alpha_2\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = \alpha_2^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

$$\lim_{x_k \to +\infty} \left(\alpha_1 \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \alpha_2\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = 0$$

情形 2：$\varepsilon = 1$

由于 $\varepsilon = 1$ 时，CES 效用函数为 $U(x) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$，易得其满足 Inada 条件。

情形 3：$\varepsilon > 1$

$$\lim_{x_k \to 0^+} \left(\alpha_1 \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \alpha_2\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = \infty$$

$$\lim_{x_k \to +\infty} \left(\alpha_1 \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \alpha_2\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = \alpha_2^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

因此，$k = 2$ 时，$U(x)$ 仅在 $\varepsilon = 1$ 情形下满足 Inada 条件，由于极限值不取决于 x_1，使用夹逼定理可以将 $k > 2$ 情形压缩为 $k = 2$。

(c) 给定 $p \gg 0$ 以及 $w > 0$，请求解 Marshall 需求函数 $x(p, w)$。求解消费者效用最大化问题：

$$\begin{aligned} &\max U(x) \\ &\text{s.t.} \quad p \cdot x \le w \\ &L = U(x) + \lambda(w - p \cdot x) \end{aligned}$$

一阶条件：

$$L_{x_k} = \alpha_k \left(\frac{U(x)}{x_k} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} - \lambda p_k = 0$$

$$x_k = \left(\frac{\alpha_k}{\lambda p_k} \right)^{\varepsilon} U(x)$$

一阶条件代入预算约束 $px = w$，解出 λ：

$$\lambda^{\varepsilon} = \frac{U(x)}{w} \cdot \sum_i p_i \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right)^{\varepsilon}$$

λ 代回一阶条件：

$$x_k = \frac{w \cdot \left(\frac{\alpha_k}{p_k}\right)^{\varepsilon}}{\sum_i p_i \cdot \left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)^{\varepsilon}}$$

(d) 请计算 Marshall 需求下商品 k 支出份额 $p_k x_k(p, w)/w$，并说明其与 α_k 的关系。

$$p_k x_k / w = \frac{p_k \cdot \left(\frac{\alpha_k}{p_k}\right)^{\varepsilon}}{\sum_i p_i \cdot \left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)^{\varepsilon}}$$

Marshall 需求下商品 k 支出份额与 α_k 成正比。

(e) 请计算 Marshall 需求函数下任意商品 k 与 ℓ 的替代弹性

$$\varepsilon_{k\ell}(p, w) = -\frac{\partial \ln(x_k(p, w)/x_\ell(p, w))}{\partial \ln(p_k/p_\ell)},$$

从而验证 CES 函数得名的原因。

$$\ln \left(\frac{x_k}{x_l} \right) = \varepsilon \cdot \ln \left(\frac{\alpha_k/\alpha_l}{p_k/p_l} \right) = \varepsilon \left(\ln(\alpha_k/\alpha_l) - \ln(p_k/p_l) \right)$$

$$\varepsilon_{k\ell}(p, w) = -\frac{\partial \ln(x_k(p, w)/x_\ell(p, w))}{\partial \ln(p_k/p_\ell)} = \varepsilon$$

任意两商品的替代弹性为常数 ε，因此得名。

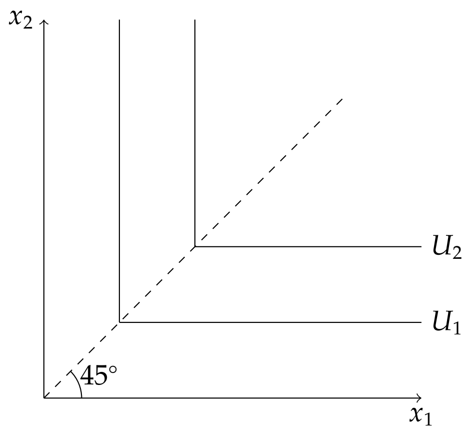
(f) 在 2-维情形绘制 $\varepsilon \to 0$ 与 $\varepsilon \to +\infty$ 时 $U(x)$ 的无差异曲线，并利用无差异曲线的性质，解释此时 ε 所代表的替代弹性的含义。

图 (a) 是 $\varepsilon \to 0$ 情形下的无差异曲线，此时 $U(x) = \min\{x_1, x_2\}$，经济含义上两种商品是完全互补的，消费者需要按 1:1 的比例消费，才能获得更高的效用。

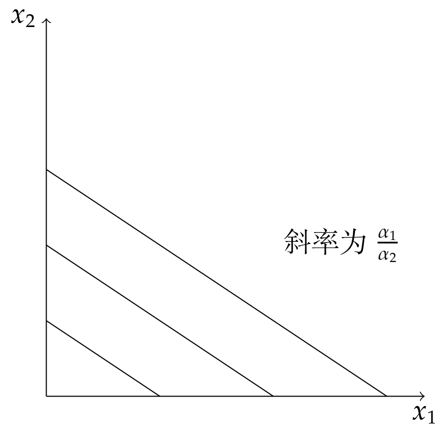
图 (b) 是 $\varepsilon \to +\infty$ 情形下的无差异曲线，此时 $U(x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$，经济含义上两种商品是完全替代的，$x_1$ 对 x_2 的边际替代率是 $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$。

(g) 请计算间接效用函数 $V(p, w) = U(x(p, w))$。

$$V(p, w) = U(x(p, w)) = \frac{w}{\sum_i p_i \cdot \left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)^{\varepsilon}} \cdot \left(\alpha_1 \left(\frac{\alpha_1}{p_1} \right)^{\varepsilon - 1} + \cdots + \alpha_k \left(\frac{\alpha_k}{p_k} \right)^{\varepsilon - 1} \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}}$$



(a) 替代弹性为 0



(b) 替代弹性为正无穷

(h) 请证明对任意 k，$\partial x_k(p,w)/\partial w > 0$，即 CES 偏好下，所有商品都是正常品 (normal good)。

$$\frac{\partial x_k(p,w)}{\partial w} = \frac{\left(\frac{\alpha_k}{p_k}\right)^{\varepsilon}}{\sum_i p_i \cdot \left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)^{\varepsilon}} > 0$$

(i) 请证明对任意 k，$\partial x_k(p,w)/\partial p_k < 0$，即 CES 偏好下，所有商品的需求定律 (law of demand) 都成立。

令 $G = \sum_i p_i \cdot \left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)^{\varepsilon}$，易得：

$$G > 0$$
$$G_{p_k} = (1-\varepsilon)\alpha_k^{\varepsilon} p_k^{-\varepsilon}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x_k(p,w)}{\partial p_k} &= \frac{-w\varepsilon \cdot \left(\frac{\alpha_k}{p_k}\right)^{\varepsilon-1} \frac{\alpha_k}{p_k^2} \cdot G - w\left(\frac{\alpha_k}{p_k}\right)^{\varepsilon} \cdot G_{p_k}}{G^2} \\
&= \frac{w\left(\frac{\alpha_k}{p_k}\right)^{\varepsilon}}{G}\left(-\frac{\varepsilon}{p_k} - \frac{(1-\varepsilon)\left(\frac{\alpha_k}{p_k}\right)^{\varepsilon}}{G}\right) \\
&= \frac{w\left(\frac{\alpha_k}{p_k}\right)^{\varepsilon}}{G}\left(\frac{-\varepsilon G - (1-\varepsilon)p_k\left(\frac{\alpha_k}{p_k}\right)^{\varepsilon}}{p_k G}\right) \\
&= \frac{w\left(\frac{\alpha_k}{p_k}\right)^{\varepsilon}}{G}\left(\frac{-\varepsilon\left(G - p_k\left(\frac{\alpha_k}{p_k}\right)^{\varepsilon}\right) - p_k\left(\frac{\alpha_k}{p_k}\right)^{\varepsilon}}{p_k G}\right) \\
&< 0
\end{aligned}
$$

(j) 请证明对任意 $k \neq \ell$，当 $\varepsilon \geq 1$ 时，$\partial x_k(p,w)/\partial p_\ell \geq 0$，即 CES 偏好下，所有商品都表现出完全替代性 (gross substitute property)。

同上，由于 $\varepsilon \geq 1$：

$$
G_{p_l} = (1-\varepsilon)\alpha_l^{\varepsilon} p_l^{-\varepsilon} \leq 0
$$

$$
\frac{\partial x_k(p,w)}{\partial p_l} = \frac{-w\left(\frac{\alpha_k}{p_k}\right)^{\varepsilon} \cdot G_{p_l}}{G^2} \geq 0
$$

2. 考虑连续情形的 CES 效用函数。假设存在连续多个商品，由 $i \in [0,1]$ 表示第 i 个商品，对应的消费记作 $x(i) \geq 0$，商品消费组合由函数 $x(\cdot)$ 表示，对应的效用表示为一个积分：

$$
U(x(\cdot)) = \left(\int_0^1 [x(i)]^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \mathrm{d}i\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}, \qquad \varepsilon > 0.
$$

(a) 假设商品 i 的价格 $p(i) > 0$，总收入为 $w > 0$，请写出如下效用最大化问题的一阶最优条件：

$$
\max_{x(\cdot)} \left(\int_0^1 [x(i)]^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \mathrm{d}i\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \qquad \text{s.t.} \qquad \int_0^1 p(i)x(i)\mathrm{d}i \leq w.
$$

注意，此问题的 Lagrange 函数如下

$$
L = \left(\int_0^1 [x(i)]^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \mathrm{d}i\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} - \lambda\left(\int_0^1 p(i)x(i)\mathrm{d}i - w\right).
$$

任意 i 对应的消费 $x(i)$ 的 FOC 为 $\partial L/\partial x(i)$，直接计算即可。

求取一阶条件：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x(i)} = U(x)^{\frac{1}{\varepsilon}} x(i)^{-\frac{1}{\varepsilon}} - \lambda p(i) &= 0 \\
x(i) &= (\lambda p(i))^{-\varepsilon} U(x)
\end{aligned}
$$

利用预算约束条件：

$$
\begin{aligned}
\lambda^{-\varepsilon} U(x) \int_0^1 p(i)^{1-\varepsilon} \mathrm{d}i &= w \\
\lambda^{-\varepsilon} &= \frac{w}{U(x)\int_0^1 p(i)^{1-\varepsilon}\mathrm{d}i}
\end{aligned}
$$

代入一阶条件：

$$x(i) = \frac{wp(i)^{-\varepsilon}}{\int_0^1 p(i)^{1-\varepsilon}\mathrm{d}i}$$

(b) 对消费组合 $\{x(i) : i \in [0,1]\}$，定义加总消费为

$$X = \left(\int_0^1 [x(i)]^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\mathrm{d}i\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}},$$

亦即将效用值本身视作加总消费水平，并进而定义加总价格水平 $P = w/X$。首先证明 (a) 中最优解处的乘子 $\lambda = P^{-1}$，进而证明消费 $x(i)$ 的需求函数可表示为

$$x(i) = \left(\frac{p(i)}{P}\right)^{-\varepsilon} X.$$

将 $x(i) = \frac{wp(i)^{-\varepsilon}}{\int_0^1 p(i)^{1-\varepsilon}\mathrm{d}i}$ 代入：

$$\begin{aligned} P &= w/X \\ &= \frac{\int_0^1 p(i)x(i)\mathrm{d}i}{\left(\int_0^1 [x(i)]^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\mathrm{d}i\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}} \\ &= \left(\int_0^1 p(i)^{1-\varepsilon}\mathrm{d}i\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \end{aligned}$$

由 (a) 得：

$$\begin{aligned} \lambda^{-\varepsilon} &= \frac{w}{U(x)\int_0^1 p(i)^{1-\varepsilon}\mathrm{d}i} \\ &= \frac{P}{P^{1-\varepsilon}} \\ &= P^{\varepsilon} \end{aligned}$$

因此，$\lambda = P^{-1}, x(i) = \left(\frac{p(i)}{P}\right)^{-\varepsilon} X.$

(c) 利用 (b) 中结果，证明

$$P = \left(\int_0^1 [p(i)]^{1-\varepsilon}\mathrm{d}i\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}.$$

见 (b) 中证明过程。

(d) 假设商品 i 的生产商为垄断生产商，单位产出的成本为常数 $c > 0$，$\varepsilon > 1$，请利用 (b) 中需求函数，求解垄断厂商的最优定价 $p^*(i)$，并给出定价加成比率 $p^*(i)/c$ 的表达式。

$$\max_{p(i)} (p(i) - c)\, x_i \qquad \text{s.t.} \qquad x(i) = \left(\frac{p(i)}{P}\right)^{-\varepsilon} \frac{w}{P}$$

$$\mathrm{FOC}[p(i)] : \frac{[p(i)]^{-\varepsilon} w}{P^{1-\varepsilon}} + [p(i) - c]\frac{w}{P^{1-\varepsilon}}(-\varepsilon)[p(i)]^{-\varepsilon-1} = 0$$

解得：

$$p^*(i) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} c$$

加成比率为 $\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}$。