2023 秋季高级微观经济学

第 2 次作业

不需提交

1. 考虑一个两家庭、两商品的交换经济 $\mathcal{E}$。假设 $U^1(x,y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$，$U^2(x,y) = x^\beta y^{1-\beta}$，$e^1 = (3,1)$，$e^2 = (1,3)$；其中 x 对应第一个商品。

   (a) 请计算 $\mathcal{E}$ 的竞争均衡 $\langle (p_x, p_y), (x^h, y^h)_{h=1,2} \rangle$。

   (b) 请计算 $\mathcal{E}$ 中契约曲线的表达式，即给定加总禀赋 $e^1 + e^2 = (4,4)$ 下所有的 Pareto 最优配置，以家庭 1 的权重 w 为表达式的自变量。化简家庭 1 的最优配置表达式 $(x(w), y(w))$，把 y 表示为 x 的函数。特别地，注意 $(x^1, y^1) = (0,0), (x^2, y^2) = (4,4)$ 或 $(x^1, y^1) = (4,4), (x^2, y^2) = (0,0)$ 都在契约曲线上。

   (c) 请验证竞争均衡配置在合约曲线上。

2. 考虑 H 个家庭的交换经济，包含一个基本商品，跨越两期 $t = 0, 1$ 且 $t = 1$ 时有 S 个随机状态 $s \in \{1, \ldots, S\}$，各状态的概率为 $\pi_s\ \forall s \in S$。家庭在 $t = 0$ 时初始禀赋均为 $e_0^h = \bar{y}/H > 0$，并进行 S 只 Arrow 证券的交易；在 $t = 1$ 时 h 在状态 s 中得到的禀赋向量为 e_s^h，且对任意状态 $s \in S$，有

$$\sum_{h \in H} e_s^h = \bar{y} > 0 \tag{1}$$

   为常数，即加总禀赋在所有状态中均相等。家庭的偏好符合期望效用形式，各期、各状态的 Bernoulli 效用函数为连续可微严格凹函数 $u_h(x)$，故期望效用函数为 $u_h(x_0^h) + \sum_{s \in S} \pi_s u_h(x_s^h)$。

   (a) 证明：无论个人禀赋 e_s^h 如何依 s 随机变动，只要总禀赋满足 (1) 式，则 REE 中的均衡配置一定满足 $x_1^h = \cdots = x_S^h$，即均衡时各家庭消费在所有状态均相同。这一结论需要假设 $u_1 = u_2$ 吗？提示：使用 REE 和 ADE 的等价性，通过 ADE 来直接求均衡消费配置。在求解 ADE 时，将 $t = 1$ 的价格写为 $\pi_1 p_1, \ldots, \pi_S p_S$ 形式。

   (b) 确定 ADE 中的均衡价格 $p_0, p_s, s = 1, \ldots, S$，进而求解均衡消费配置 $x_0^h, x_s^h, s = 1, \ldots, S$。

   (c) 写出动态市场下各家庭的预算约束，并写出家庭消费、资产配置所应满足的一阶条件。给出 REE 均衡时每个人的 Arrow 证券投资组合 y_h(表示为均衡消费的函数)，并给出每只 Arrow 证券的价格表达式。这些价格和 π_s 有什么关系？

3. 考虑一个不确定环境下的交换经济，包括 H 个家庭、一个基本商品，商品空间为 $X = \mathbb{R}_+$。该经济可能处于 S 个状态，每个状态发生的概率记为 $\pi_s > 0$，$\sum_s \pi_s = 1$。我们假设每个家庭 h 的偏好满足 von Neumann-Morgentern 期望效用理论，对应的 Bernoulli 效用函

数为 $u_h(x)$；给定状态依存消费选择 $x=(x_s)_{s\in S}$，对应的期望效用为 $U_h(x)=\sum_s \pi_s u_h(x_s)$。每个家庭的状态依存禀赋记为 $e^h=(e^h_s)_{s\in S}$；各个状态下的总禀赋记为 $e_s=\sum_h e^h_s$。我们总假设每个家庭都是风险厌恶的 (risk-averse)，即 u_h 是凹函数。

(a) 请证明 $U_h(x)$ 是 X^S 上的凹函数。

(b) 假设 u_h 是一阶连续可微的。给定一组严格正的福利权重 $(\mu_1,\ldots,\mu_H)\in\mathbb{R}^H_{++}$，给定该经济的可行配置 (feasible allocation) 约束集

$$\mathcal{F}=\left\{(x^h)_{h\in H}: x^h_s\geq 0, \sum_h x^h_s\leq e_s, h\in H, s\in S\right\}.$$

首先请说明最优化问题 $\max_{(x^h)_h\in\mathcal{F}}\sum_h \mu_h U_h(x^h)$ 的解是一个 Pareto 最优配置。其次请写出最优化问题对应的 Lagrangian 函数及最优解对应的一阶必要条件；注意：请写出 $\mathcal{F}$ 中 **所有**约束对应的乘子及 **所有**的一阶条件。请问这些一阶条件也是最优解的充分条件吗？(你可以参考 Simon and Blume 讨论约束最优化的相关章节。)

通常，我们称这样的 Pareto 最优配置为最优风险分担 (optimal risk-sharing) 配置。下面你将逐步了解为什么称其为最优风险分担配置。

(c) 进一步假设 u_h 二阶连续可微，严格单调递增 (上一问中我们并没有这样的假设！)，并且满足 Inada 条件：$\lim_{x\to 0+}\mathrm{d}u_h(x)/\mathrm{d}x=+\infty$。请证明：

  i. 此时的 Pareto 最优配置一定是内点解 (interior solution) 而非角点解 (corner solution)，即最优解 $(x^h)_h$ 满足 $x^h_s>0$；

  ii. 给定 s，最优解时每个家庭的加权边际效用 $\mu_h u'_h(x^h_s)$ 均相同；

  iii. 给定 s，若每个家庭的权重相同，$\mu_h=1/H$，则每个家庭的 Pareto 最优消费水平 x^h_s 相同。更一般的，请证明此时 Pareto 最优消费与家庭各自的状态依存禀赋无关，亦即与个体风险 (idiosyncratic risk) 无关。

(d) 考虑这个交换经济的 AD 均衡，并假设 (2)–(3) 中关于 u_h 的假设继续成立。简单起见，假设对所有家庭有 $e^h\gg 0$。

  i. 请证明：均衡配置都是内点解而非角点解。

  ii. 假设经济中没有加总风险 (aggregate risk)，即 $e_1=\cdots=e_S$。假设所有家庭的 Bernoulli 效用函数为相同 CRRA 型

$$u(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}, & \sigma>0,\sigma\neq 1;\\ \log(x), & \sigma=1.\end{cases}$$

  验证该函数满足 Inada 条件并求解唯一的 AD 均衡。请说明均衡时所有家庭在不同状态下的消费均相同。

  此时所有的个体收入 (禀赋) 风险都得到完全的保险或对冲。(若效用函数均为同样的 CARA 型，也可解出的结论。)

  iii. 继续假设经济中没有加总风险。放宽 (b) 中假设为所有家庭具有同样但一般形式的效用函数 $u(x)$，请问 (2) 中得到的均衡还是这个一般的交换经济的 AD 均衡吗？均衡时完全的保险依然成立吗？

4. 考虑 Hart (1975) 的动态市场 RE 均衡的例子。假设 $H=K=S=2$；两商品记为 x,y；两状态概率相等。每个家庭的效用只取决于 $t=1$ 的消费，用下标表示 (x_{hs},y_{hs})。家庭 1 在每个状态中的 von Neumann-Morgentern 效用为 $2^{5/2}x_{1s}^{1/2}+2y_{1s}^{1/2}$，期望效用为

$$U_1=2^{3/2}x_{11}^{1/2}+y_{11}^{1/2}+2^{3/2}x_{12}^{1/2}+y_{12}^{1/2}.$$

家庭 2 的状态效用为 $2x_{2s}^{1/2} + 2^{5/2}y_{2s}^{1/2}$，期望效用为

$$U_2 = x_{21}^{1/2} + 2^{3/2}y_{21}^{1/2} + x_{22}^{1/2} + 2^{3/2}y_{22}^{1/2}.$$

家庭 1 在状态 1、2 中的禀赋分别为 $e_{11} = (5/2, 50/21), e_{12} = (13/21, 1/2)$；家庭 2 在状态 1、2 中的禀赋分别为 $e_{21} = (1/2, 13/21), e_{22} = (50/21, 5/2)$。

(a) 假设证券市场结构不完全导致每个家庭在两个状态之间转移的财富总量都是 0。分别求解此种情况下状态 1、2 对应的竞争均衡以及均衡效用。

(b) 假设在 $t = 0$ 时存在所有状态依存商品的 AD 市场。求解此种情形下的 AD 均衡。计算两个家庭的均衡效用，并与上一问的结果进行比较。提示：此种情况是两家庭、四商品的交换均衡，直接求解会比较复杂。要注意使用家庭最优化一阶条件与市场出清条件化简待解方程；为此可证明 $x_{h1} = x_{h2}, y_{h1} = y_{h2}$，且 $\bar{p}_{x1} = \bar{p}_{x2}, \bar{p}_{y1} = \bar{p}_{y2}$。

(c) 利用上问中解出的 AD 均衡，计算两个家庭在每个状态中的财富转移向量 $w_h = (w_{h1}, w_{h2})^\intercal$。考虑如下的证券市场结构

$$A_1 = [1, 0, 1, 0]^\intercal, \quad A_2 = [0, 1, 0, 1]^\intercal.$$

使用 (1)、(2) 中得到的 RE、AD 均衡价格向量计算 $A = [A_1, A_2]$ 对应的价值矩阵 V，并说明是否存在证券组合 $z_h = (z_{h1}, z_{h2})^\intercal$ 使得 $w_h = Vz_h$。再考虑如下的证券市场结构

$$A_1 = [1, 0, 2, 0]^\intercal, \quad A_2 = [0, 2, 0, 1]^\intercal.$$

重复前述计算与讨论，并验证此时 RE 均衡中的均衡证券组合 z_h 一定要满足 $Vz_h = [0, 0]^\intercal$。

5. 参考 Grossman and Stiglitz (1980) 部分课件及论文。

 a. 请写出 $\lambda > 0$ 时均衡价格函数 $P_\lambda^*(\theta, x) = \alpha_1 + \alpha_2 w_\lambda(\theta, x)$ 中常数 α_1, α_2 的表达式，验证 $\alpha_2 > 0$ 并讨论 α_2 对 λ 的依赖性质 (参考 II.G 中的表达式 m, n)。

 b. 请验证 $P_\lambda^*(\theta, x)$ 满足市场出清条件。

 c. 请依次验证 II.H 中比较静态的结论，以及 II.I 1)、2) 中均衡性质的结论。

 d. 给定均衡价格函数 $P^*(\theta, x)$，不考虑信息获取成本 c 且假定初始财富相等，请计算 I-和 U-交易者的均衡期望效用，并比较大小。

 e. 请验证课件定理 2 中的表达式

$$\frac{\mathbb{E}V(W_{Ii}^\lambda)}{\mathbb{E}V(W_{Ui}^\lambda)} = e^{ac}\sqrt{\frac{\mathrm{var}(u|\theta)}{\mathrm{var}(u|w_\lambda)}}.$$

6. 考虑如下 2×2 策略形式博弈 (左、右数字是 P1、P2 的收益)

		P2 L	P2 R
P1	U	$a, 0$	$0, b$
P1	D	$0, c$	$d, 0$

其中 a, b, d 和 d 均严格大于 0。

(a) 请说明该博弈没有纯策略 Nash 均衡。

(b) 请说明该博弈只有唯一的混合策略 Nash 均衡 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$，并计算之。

(c) 验证如下事实：给定对手 $-i$ 的策略 σ_{-i}，则参与者 i 以严格正概率选择的任一纯策略都产生相同的收益。

(d) 上述结论在一般的有限正规形式博弈 $\Gamma = \langle I, (u_i, S_i)_{i\in I}\rangle$ 中也成立：给定所有 $S_i = \{1, \ldots, S_i\}$ 为有限集，若 $\sigma = (\sigma_i)_{i\in I}$ 是 Γ 的一个 Nash 均衡，则对任意的 i，若 $\sigma_i(n), \sigma_i(m) > 0, n, m \in S_i$，且所有对手选择均衡策略 $\sigma_{-i} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_I)$ 不变，那么 i 选择 n 时得到的期望效用等于选择 m 时得到的期望效用。试证明该结论。

7. **Spence 劳动力市场模型**。考虑两种类型的工人，生产率 $k = 1$ 或 2，效用函数为 $u_k(w, e) = w - \theta_k g(e)$，其中 $\theta_1 > \theta_2$，$g(e)$ 为 2-阶连续可微严格递增、严格凸函数，满足 $g'(0)$ 充分小。高、低生产率员工的比例为 $1-\pi > 0$ 和 $\pi > 0$。工人先选择各自的教育程度 e_k，随后两家企业根据观察到的受教育程度，以及各个教育程度中低技能员工比例的信念 $\mu(e)$，支付竞争性的工资 $w(e)$。生产率为 k、教育程度为 e 的工人可以为企业带来的价值为 ke。

(a) **单交性** (single crossing property)　假设 $f(x, \theta) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2-阶连续可微，$\partial^2 f/\partial x \partial\theta \geq 0$ 且对任意 x 该二阶导关于 θ 不恒为 0。(i) 请证明，对任意的 $\theta_1 > \theta_2$，$f(x, \theta_1)$ 与 $f(x, \theta_2)$ 至多交于一点。(ii) 请验证 $u(w, e, \theta) = w - \theta g(e)$ 的无差异曲线 (表示为 e, θ 的函数) 满足单交性条件。

(b) 假设类型为 k 的工人中选择教育程度 e 的比例为 $\sigma_k(e)$，且 $\sigma_1(e) + \sigma_2(e) > 0$(即两者中至少一个严格大于 0)。(i) 按照 Nash 均衡的定义，两家企业是否知道 $\sigma_k(e)$ 的值？(ii) 此时两家企业关于 e 处两类工人占比的信念取值如何？(iii) 序贯理性要求两家企业支付的工资率是多少，以及该工资率是否唯一 (请详细说明理由)？

(c) 考虑一个合并均衡 $e^* > 0$。(i) 均衡工资是多少？(ii) 画图说明什么样的工资函数 $w(e)$ 能够让两类工人自愿选择 e^*。(iii) 给定任一满足条件的工资函数 $\hat{w}(e)$，请计算对应的信念系统 $\hat{\mu}(e)$。

(d) 假设备选的 $N+1 \geq 2$ 个教育程度为 $E = \{e_0, e_1, \ldots, e_N\}$；特别地，令 $e_0 = e^*$。(i) 请说明，在任一序贯均衡中，均衡信念系统 $\mu(e)$ 对应的工资函数满足 $e \leq w(e) \leq 2e$。(ii) 若通过上述合并均衡点 e^* 的低生产率工人无差异与直线 $w = e$ 相交 (不是相切)，请说明 e^* 点不是序贯均衡。(iii) 假设 (ii) 中情况不出现，请详细说明 e^* 确实可以成为一个序贯均衡；为此，请构造恰当的完全混合策略和信念组序列 $(\sigma_1^\varepsilon, \sigma_2^\varepsilon, \{\mu^\varepsilon(e)\}_{e\in E})$，满足 $\sigma_k^\varepsilon(e) > 0\, \forall e \in E$，使得当 $\varepsilon \to 0$ 时该序列收敛到均衡策略与信念组 $(\sigma_1, \sigma_2, \hat{\mu}(\cdot))$，其中 $\sigma_1(e^*) = \sigma_2(e^*) = 1$，$\hat{\mu}(e^*) = \pi$。

(e) 下面考虑分离均衡 $e_l \neq e_h$，即低生产率员工选择 e_l 而高生产率员工选择 e_h。(i) 请说明 (用反证法) 任何序贯均衡中 e_l 一定是 $\max_x u_1(x, x)$ 的解，即 e_l 一定是 1-类员工无差异曲线与低工资线 $w = e$ 的切点。(ii) 将过 e_l 的低生产率员工无差异曲线与 $w = 2e$ 的交点记为 e_0，请说明序贯均衡中 $e_h \geq e_0$。(iii) 请画图说明什么样的工资曲线 $w(e)$，即信念系统 $\mu(e)$，可以保证 (e_l, e_h) 的确构成一个分离均衡？(iv) 请说明 Riley 结果 (e_l^*, e_h^*) 是唯一满足直观准则的分离均衡结果，其中 e_l^* 就是 (i) 中的 e_l，e_h^* 是 $\max_x u_2(2x, x)$ s.t. $x \geq e_0$ 的解；换言之，如果有另一个分离均衡 (e_l, e_h)，其中 $e_h \neq e_h^*$，则该均衡不满足直观准则。

(f) **均衡的福利/效率性质**　Spence 模型中可以定义 Pareto 有效配置。先定义可行配置：给定两类员工 N 个可能的教育选择 $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$，以及每个 e_i 处对应的员

工比例 $\mu(e_i)$，企业在 e_i 出支付的工资需满足 $w(e_i) \le \mu(e_i) + (1-\mu(e_i)) \cdot 2e$。此处员工的教育选择也可写为 $\sigma_k(e_i)$，即选择每个教育程度的 k-类员工比例，再计算相应的 $\mu(e_i)$。Pareto 有效配置：给定配置 $\{(e_i, \mu_i, w_i) : i = 1, \ldots, N\}$，不存在另一可行配置使得至少一类员工的效用严格增加而另一类员工的效用不变。(i) 如果通过 Riley 结果中 e_h^* 点的高生产率员工无差异曲线与高工资线 $w = 2e$ 相切于 e_h^* 点，请说明对应的配置为 Pareto 最优。(ii) 如果通过 e_h^* 点的高生产率员工无差异与 $w = 2e$ 相交 (穿过到工资线下方)，且 π 足够小使得平均工资线 $w = \pi e + 2(1-\pi)e$ 与该无差异曲线相交 (允许相切)，请说明此时的 Riley 结果不是 Pareto 最优。

8. 考虑课件中的 Leland-Pyle 模型。

   (a) 请验证下列逻辑关系

   $$\frac{p_G(1-\bar{p})}{\bar{p}(1-p_G)} > \frac{u'(0)}{u'(C^H)} \Leftrightarrow \partial_\alpha U(1, \bar{p}C^H|p_G) > 0 \Rightarrow \partial_\alpha U(\alpha, \bar{p}C^H|p_G) > 0,\ \forall \alpha.$$

   (b) 请验证下列不等式 $\partial_\alpha U(\alpha, p_B C^H|p_G) > 0, \partial_\alpha U(\alpha, p_G C^H|p_G) < 0, \partial_\alpha U(\alpha, p_G C^H|p_B) < 0,\ \forall \alpha$，以及 $U(0, p_G C^H|p_B) > U(0, p_B C^H|p_B) > U(1, p_G C^H|p_B)$。

   (c) 请证明唯一满足直观准则的分离均衡为 $\alpha_G = \alpha^*, \alpha_B = 0$。

9. 参考 Stiglitz & Weiss (1981) 部分课件。

   (a) 请证明：$\mathbb{E}[\pi(R,r)|\theta] \uparrow \theta, \hat{\theta}(r) \uparrow r, \tilde{\rho}(\theta, r) = \mathbb{E}[\rho(R,r)|\theta] \downarrow \theta$。

   (b) 请验证下列导数表达式：

   $$\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}}{\mathrm{d}r} = -\frac{g(\hat{\theta})}{1-G(\hat{\theta})}(\hat{\rho} - \bar{\rho})\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{1-G(\hat{\theta})}\int_{\hat{\theta}}^{\infty} [1 - F((1+r)B - C, \theta)]\mathrm{d}G(\theta),$$

   并讨论 $\hat{\rho}$ 和 $\bar{\rho}$ 的大小关系。

10. 假设 $F(q|a)$ 关于 a 满足一阶随机占优。最优激励合约 (即次优合约，second best contract) 满足如下关于 $w(p)$ 的一阶条件

    $$\frac{V'(q - w(q))}{u'(w(q))} = \lambda + \mu \frac{f_a(q|a)}{f(q|a)}.$$

    (a) 比较 $w(q)$ 与最优合约 (first best contract)$w_*(q)$ 的大小关系。

    (b) 假设密度函数 $f(q|a)$ 处处大于 0，关于 q, a 2-阶连续可微，且 $f_a(q|a)/f(q|a)$ 关于 q 递增 (不恒为常数)。请证明：当 $p > r$ 且 $a > b$ 时，有下述不等式

    $$\frac{f(p|a)}{f(p|b)} > \frac{f(r|a)}{f(r|b)}$$

    成立。该式称为单调似然比 (monotone likelihood ratio，MLR) 性质：更高的观测值 p 意味着高低状态 a, b 之间更高的似然比。

    (c) 从 MLR 出发，证明当 $a > b$ 时，$F(q|a) < F(q|b)$；换言之，MLR 意味着一阶随机占优；可参考 Milgrom (1981, BJE) 或其他参考教材。

    d. 假设 $f(q|a)$ 满足 MLR，讨论此时 $w(q)$ 和 $w_*(q)$ 的大小关系。

11. 本题基于 Holmström (1979) sec. 2 的例子 p. 79。假设 $V(q-w)=q-w$，$u(w)=2\sqrt{w}$，$\phi(a)=a^2$；给定 $a>0$，产出 $q\in[0,\infty)$ 满足指数分布 $\exp(1/a)$，其密度函数为 $f(q|a)=\frac{1}{a}e^{-q/a}$，分布函数为 $F(q|a)=1-e^{-q/a}$，$q\geq 0$。激励合约设计问题的原初形式 (P*) 和一阶方法形式 (P)。

(a) 请验证 $\mathbb{E}q=a,\mathbb{E}q^2=2a^2,\mathrm{var}q=a^2$。

(b) 请写出委托人激励合约设计问题的原初形式 (P*) 和一阶方法形式 (P)。

(c) 对于委托人最优化问题 (P)，请推导关于 $w(q)$ 的一阶条件。

(d) 验证激励合约满足

$$w(q)=\left(\lambda+\mu\frac{q-a}{a^2}\right)^2.$$

(e) 请计算 (P) 中一阶形式激励约束

$$\int_0^\infty u(w(q))f_a(q|a)\mathrm{d}q=\phi'(a)$$

左端的积分并验证 $\mu=a^3$。一个简单的方法是使用分部积分并注意利用 (a) 中的结论。

(f) 请验证当 $w(q)$ 为 (d) 中形式时，代理人效用函数 (作为 a 的函数)

$$\int_0^\infty u(w(q))f(q|a)\mathrm{d}q-\phi(a)$$

是一个严格凹函数；再说明由 (P) 中一阶形式激励约束确定的代理人最优选择 a 是给定 $w(q)$ 下的全局最大值点，从而 (P) 与 (P*) 等价。

(g) 请验证委托人问题 (P) 中关于 a 的一阶最优条件满足

$$\int_0^\infty V(q-w(q))f_a(q|a)\mathrm{d}q+\mu\left[\int_0^\infty u(w(q))f_{aa}(q|a)\mathrm{d}q-\phi''(a)\right]=0.$$

请上式中的两个积分，并验证 $4a^3+2\lambda a=1$。(e) 中的提示同样适用。

(h) 当保留效用 (reservation utility) $\bar{u}\geq 0$ 时，请由 (f) 验证最优解对应的 $\lambda>0$。假设 $\bar{u}=\frac{3}{4}$，请求解相应的 λ,μ,a 以及 $w(q)$。

(i) 验证 $f(q|a)$ 满足 MLR 性质，并计算上述问题对应的第一最优合约 $w_*(q)$，讨论 $w_*(q)$ 和 $w(q)$ 的关系。