2023 秋季高级微观经济学

# 第 1 次作业

提交日期：10 月 10 日

1. 考虑如下定义在 $\mathbb{R}^K_{++}$ 上的 CES (constant elasticity of substitution) 函数：

$$U(x) = \left(\alpha_1 x_1^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \cdots + \alpha_K x_K^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}, \qquad \varepsilon \geq 0,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_K > 0,\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_K = 1.$$

解答下列问题。

(a) 求出下列 $\varepsilon$ 极限取值时，$U(x)$ 的函数形式：

$$\lim_{\varepsilon \to 1} U(x), \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} U(x), \qquad \lim_{\varepsilon \to +\infty} U(x).$$

(b) 以下考虑 $\varepsilon > 0$ 且有限的情形。请证明 $U(x)$ 是一次齐次函数，关于所有 $x_k$ 递增，且满足 Inada 条件。

(c) 给定 $p \gg 0$ 以及 $w > 0$，请求解 Marshall 需求函数 $x(p, w)$。

(d) 请计算 Marshall 需求下商品 $k$ 支出份额 $p_k x_k(p, w)/w$，并说明其与 $\alpha_k$ 的关系。

(e) 请计算 Marshall 需求函数下任意商品 $k$ 与 $\ell$ 的替代弹性

$$\varepsilon_{k\ell}(p, w) = -\frac{\partial \ln(x_k(p, w)/x_\ell(p, w))}{\partial \ln(p_k/p_\ell)},$$

从而验证 CES 函数得名的原因。

(f) 在 2-维情形绘制 $\varepsilon \to 0$ 与 $\varepsilon \to +\infty$ 时 $U(x)$ 的无差异曲线，并利用无差异曲线的性质，解释此时 $\varepsilon$ 所代表的替代弹性的含义。

(g) 请计算简介效用函数 $V(p, w) = U(x(p, w))$。

(h) 请证明对任意 $k$，$\partial x_k(p, w)/\partial w > 0$，即 CES 偏好下，所有商品都是正常品 (normal good)。

(i) 请证明对任意 $k$，$\partial x_k(p, w)/\partial p_k < 0$，即 CES 偏好下，所有商品的需求定律 (law of demand) 都成立。

(j) 请证明对任意 $k \neq \ell$，当 $\varepsilon \geq 1$ 时，$\partial x_k(p, w)/\partial p_\ell \geq 0$，即 CES 偏好下，所有商品都表现出完全替代性 (gross substitute property)。

2. 考虑连续情形的 CES 效用函数。假设存在连续多个商品，由 $i \in [0, 1]$ 表示第 $i$ 个商品，对应的消费记作 $x(i) \geq 0$，商品消费组合由函数 $x(\cdot)$ 表示，对应的效用表示为一个积分：

$$U(x(\cdot)) = \left(\int_0^1 [x(i)]^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \mathrm{d}i\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}, \qquad \varepsilon > 0.$$

(a) 假设商品 $i$ 的价格 $p(i) > 0$，总收入为 $w > 0$，请写出如下效用最大化问题的一阶最优条件：

$$\max_{x(\cdot)} \left( \int_0^1 [x(i)]^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \mathrm{d}i \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \qquad \text{s.t.} \qquad \int_0^1 p(i)x(i)\mathrm{d}i \leq w.$$

注意，此问题的 Lagrange 函数如下

$$L = \left( \int_0^1 [x(i)]^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \mathrm{d}i \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} - \lambda \left( \int_0^1 p(i)x(i)\mathrm{d}i - w \right).$$

任意 $i$ 对应的消费 $x(i)$ 的 FOC 为 $\partial L / \partial x(i)$，直接计算即可。

(b) 对消费组合 $\{x(i) : i \in [0, 1]\}$，定义加总消费为

$$X = \left( \int_0^1 [x(i)]^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \mathrm{d}i \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}},$$

亦即将效用值本身视作加总消费水平，并进而定义加总价格水平 $P = w/X$。首先证明 (a) 中最优解处的乘子 $\lambda = P$，进而证明消费 $x(i)$ 的需求函数可表示为

$$x(i) = \left( \frac{p(i)}{P} \right)^{-\varepsilon} X.$$

(c) 利用 (b) 中结果，证明

$$P = \left( \int_0^1 [p(i)]^{1-\varepsilon} \mathrm{d}i \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}.$$

(d) 假设商品 $i$ 的生产商为垄断生产商，单位产出的成本为常数 $c > 0$，$\varepsilon > 1$，请利用 (b) 中需求函数，求解垄断厂商的最优定价 $p^*(i)$，并给出定价加成比率 $p^*(i)/c$ 的表达式。