

中级宏观经济学

第 4 讲：不完全市场宏观模型基础

授课人：刘岩

武汉大学经管学院金融系

2024 年 11 月 11 日

本讲内容

- 1 收入波动下的消费/储蓄问题
- 2 Bewley 模型
- 3 均衡效率问题

本节内容

① 收入波动下的消费/储蓄问题

② Bewley 模型

③ 均衡效率问题

基准模型

考虑如下个体消费-储蓄问题：

$$\max_{\{c_t, a_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad \text{s.t.} \quad c_t + a_{t+1} \leq y_t + (1+r)a_t, c_t \geq 0, a_{t+1} \geq \underline{a}, \forall t \geq 0, \text{给定 } a_0$$

- $u(c)$ 满足标准条件，包括 Inada 条件，常用函数形式为 CRRA
- $r > 0$ 为常数安全资产回报率
- 收入 $\{y_t\}$ 通常假设为 Markov 过程，包含 iid 情形，且假设 $y_t \geq \underline{y} \geq 0$
 - 收入波动 (income fluctuation)：个体面对收入风险（状态），但只有一个安全资产，市场不完全
- 储蓄为安全资产 a_t ， $\underline{a} \leq 0$ 表示借贷（流动性）约束
 - 自然借贷约束 (natural borrowing limit) 为 $\underline{a} = -\sum_{\tau \geq 0} (1+r)^{-\tau} \underline{y} = -\underline{y}/r \leq 0$

基准模型的分析

- 核心参考文献：Schechtman (1976), Schechtman and Escudero (1977), Chamberlain and Wilson (2000, w.p. 1984), Deaton (1987), Kimball (1990)
- Inada 条件下, $c_t > 0$, 只需考虑流动性约束 $a_{t+1} \geq \underline{a}$, FOC 为

$$u'(c_t) = \beta(1+r)\mathbb{E}_t u'(c_{t+1}) + \eta_t \geq \beta(1+r)\mathbb{E}_t u'(c_{t+1})$$

η_t 为流动性约束的乘子, 最优消费的渐进性质取决于 $\beta(1+r)$

- 若 $\beta(1+r) \geq 1$, 则 $u'(c_t) \geq \mathbb{E}_t u'(c_{t+1})$, 边际效用 $\{u'(c_t)\}$ 为上鞅 (super-martingale), 一般条件下可证明 $u'(c_t) \rightarrow 0$, 故 $c_t, a_{t+1} \rightarrow \infty$
- 若 $\beta(1+r) < 1$, 最优解收敛

递归形式

- 在 Markov 假设下，上述最优化问题可写为递归形式的 Bellman 方程

$$V(a, y) = \max_{c, a'} u(c) + \beta \mathbb{E}[V(a', y') | y]$$

$$\text{s.t. } c + a' \leq y + (1 + r)a$$

$$c \geq 0, \quad a' \geq \underline{a}$$

- Bellman 方程解的存在唯一性可通过标准方法，即压缩映射不动点定理证明
- 所得最优解表示为一组函数：值函数 $V(a, y)$ ，政策函数 $c = G_c(a, y)$ 及 $a' = G_a(a, y)$

最优解政策函数示意: Aiyagari (1994)

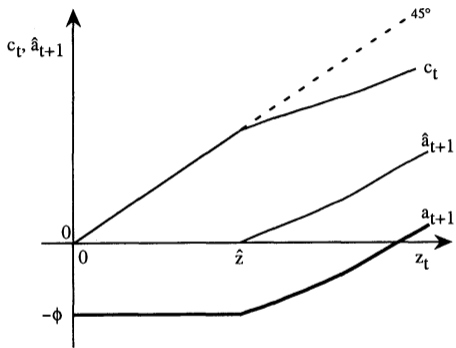


FIGURE 1a
Consumption and Assets as Functions
of Total Resources

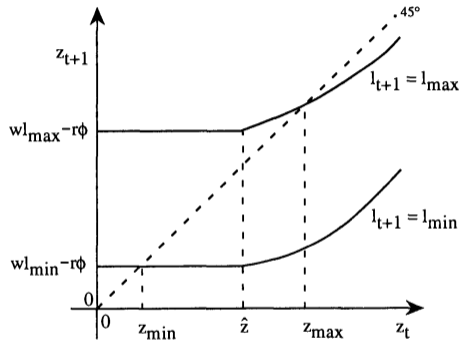


FIGURE 1b
Evolution of Total Resources

本节内容

① 收入波动下的消费/储蓄问题

② **Bewley 模型**

③ 均衡效率问题

一般均衡下的收入波动问题

- Bewley (1980, 1986) 最早在动态一般均衡框架中考虑了收入波动下的消费-储蓄 (货币持有) 问题, 进行了理论刻画
 - 这一系列异质性个体一般均衡模型, 统称为 Bewley 模型
- Huggett (1993) 最早在一般均衡场景下进行数值求解, 确定均衡利率 r^*
 - 资产市场中, 无风险资产净供给为 0, 故均衡条件为 $\mathbb{E}^{(a,y)} G_a(a, y|r^*) = 0$, 即家庭资产加总为 0
- Aiyagari (1994) 引入了资本和生产, 建立了第一代完整版异质性个体宏观模型
 - 加总储蓄等于资本总量, 故均衡条件为 $\mathbb{E}^{(a,y)} G_a(a, y|r^*) = K$
- 上述模型无加总冲击, 仅考虑平稳均衡 (stationary equilibrium), 即均衡时个体分布及价格不变的均衡
 - Krusell and Smith (1998) 首次在 Aiyagari 框架下引入加总 TFP 冲击, 并进行近似求解

平稳均衡示意: Aiyagari (1994)

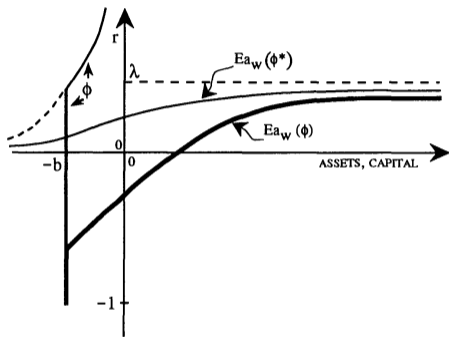


FIGURE IIa
Interest Rate versus Per Capita Assets

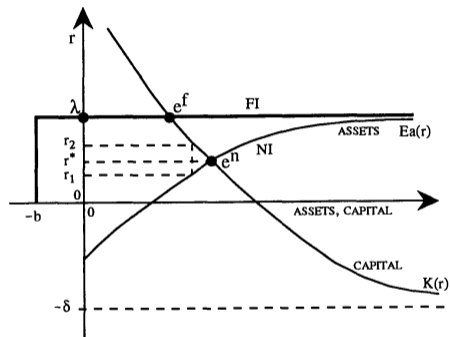


FIGURE IIb
Steady-State Determination

本节内容

① 收入波动下的消费/储蓄问题

② Bewley 模型

③ 均衡效率问题

Bewley 模型中的效率问题

- 核心文献：Dávila, Hong, Krusell, and Ríos-Rull (2012)
- 不完全市场下，收入风险会造成个体有预防性储蓄 (precautionary saving) 动机，增加个体储蓄
 - 简单的线性外推：预防性储蓄动机会造成宏观层面储蓄高于完全市场情形
 - Aiyagari 模型均衡确实表现出 $r^* < 1/\beta - 1$ ，而完全市场下两者相等
 - 但 Dávila et al. (2012) 的分析说明实际情况更为复杂

两期模型的例子：基准情形

- 一共两期， $t = 0, 1$
- 一个商品，即可消费，也可储蓄并 1-1 转化为资本品
- 无穷多消费者， $i \in [0, 1]$ ， $t = 0$ 时有初始禀赋 ω ，效用函数为

$$u(c_1) + \beta \mathbb{E}u(c_2)$$

效用函数 u 满足标准假设（及 Inada 条件），储蓄/借贷满足 NBL

- 第 2 期 $t = 1$ 时，每个消费者 i 的劳动禀赋（时间）随机取值

$$\begin{cases} e_1, & \pi_1 = \pi \\ e_2, & \pi_2 = 1 - \pi \end{cases} \quad \text{其中 } 0 < e_1 < e_2, 0 < \pi < 1$$

- 大数定律意味着 $t = 1$ 时，劳动禀赋为 e_1 的人数为 π ， e_2 的人数为 $1 - \pi$

生产及市场

- $t = 1$ 时的劳动供给为 $L = \pi e_1 + (1 - \pi)e_2$
 - 无弹性 (inelastic) 劳动供给；弹性供给见 Pijoan-Mas (2006), Marcet et al. (2007)
- $t = 1$ 时的加总资本供给为 $K = \int_0^1 a_i di$, a_i 为消费者 i 在 $t = 0$ 时的储蓄
 - $t = 0$ 时所有消费者同质，故储蓄相当 $a_i = a = K$
- 生产函数为 $f(K, L)$, 可微且规模报酬不变
- 资本与劳动市场均完全竞争，资本租金率（回报率）为 r , 工资率为 w
 - 若消费者劳动禀赋为 $e \in \{e_1, e_2\}$, 则 $t = 1$ 时的收入为 $ra + we = rK + we$

均衡

定义 1

竞争性均衡可表示为 (K, r, w) ，满足下列条件：(i) K 最大化

$$\max_{a \in [-we_1/r, \omega]} u(\omega - a) + \beta[\pi u(ra + we_1) + (1 - \pi)u(ra + we_2)]$$

(ii) $r = f_k(K, L)$, $w = f_l(K, L)$, 且 $L = \pi e_1 + (1 - \pi)e_2$

注 $a \geq -we_1/r$ 表示消费者个体的自然借贷约束 NBL，给定 Inada 条件，消费者不会选择 0 消费，故不会借入 NBL 水平的债务，因此后续分析不必考虑该约束

均衡约束有效的概念

- 利用价格与市场出清条件，该模型均衡中唯一的内生变量为 $a = K$

定义 2

给定均衡资本 K ，若不存在另一资本水平 $\hat{K} \neq K$ ，使得

$$u(\omega - \hat{K}) + \beta[\pi u(f_k(\hat{K}, L)\hat{K} + f_l(\hat{K}, L)e_1) + (1 - \pi)u(f_k(\hat{K}, L)\hat{K} + f_l(\hat{K}, L)e_2)] \\ > u(\omega - K) + \beta[\pi u(f_k(K, L)K + f_l(K, L)e_1) + (1 - \pi)u(f_k(K, L)K + f_l(K, L)e_2)]$$

则称均衡配置为约束有效 (constrained efficient)， K 为约束有效储蓄/资本；否则称为约束无效

注 假想的社会计划者只允许改变资本，而不能跳出不完全市场的约束

均衡约束无效：分析

- 对均衡效用进行全微分可得

$$dU = -u'(\omega - K)dK + \beta[\pi u'(rK + we_1)dC_1 + (1 - \pi)u'(rK + we_2)dC_2]$$

其中 $dC_i = rdK + Kdr + e_idw, i = 1, 2$

- 个体消费者 FOC 为

$$u'(\omega - K) = \beta[\pi u'(rK + we_1) + (1 - \pi)u'(rK + we_2)]r$$

- 代入 dU , 可简化为

$$dU = \beta[(\pi u'(rK + we_1) + (1 - \pi)u'(rK + we_2))Kdr \\ + (\pi u'(rK + we_1)e_1 + (1 - \pi)u'(rK + we_2)e_2)d\omega]$$

等价于使用了包络定理

均衡约束无效：分析

- 前式说明，储蓄/资本对均衡福利的边际效用，仅通过要素价格发挥作用
- 由 $dr = f_{kk}(K, L)dK$, $dw = f_{kl}(K, L)dK$, dU 可写为

$$dU = \beta[\pi u'(rK + we_1)(Kf_{kk}(K, L) + e_1f_{kl}(K, L)) \\ + (1 - \pi)u'(rK + we_2)(Kf_{kk}(K, L) + e_2f_{kl}(K, L))]dK$$

- 由于 $f(K, L)$ 一次齐次，故 $Kf_{kk}(K, L) + Lf_{kl}(K, L) = 0$ ，故

$$dU = \beta \left[\pi u'(rK + we_1) \left(1 - \frac{e_1}{L} \right) \right. \\ \left. + (1 - \pi) u'(rK + we_2) \left(1 - \frac{e_2}{L} \right) \right] f_{kk}(K, L) K dK$$

均衡约束无效：分析

- 令

$$\chi \equiv \frac{u'(f_k(K, L)K + f_l(K, L)e_1)}{u'(f_k(K, L)K + f_l(K, L)e_2)} > 1$$

- dU 可最终简化为

$$dU = \beta u'(f_k(K, L)K + f_l(K, L)e_2) \times \pi(\chi - 1) \left(1 - \frac{e_1}{L}\right) f_{kk}(K, L) K dK$$

- 由于 f 是凹函数, $f_{kk} < 0$, 故 $dK < 0$ 可提高均衡福利, 因此, 模型中竞争性均衡是约束无效的
- 如上所示, 自由放任 (laissez-faire) 均衡中, 储蓄-资本过高
 - 直观解释: 减小 K , 可推高 r 、降低 w , 从而让个体收入中有风险的部分 (劳动收入) 份额减少, 增加无风险的收入 (资本收入), 从而让个体风险敞口缩小
 - 扭曲 (distortion) 的核心来源是不完全市场: 消费者只能通过储蓄对冲劳动风险, 预防性储蓄带来过度储蓄

模型拓展：初始资产异质性

- 假设初始资产 ω 服从分布 $\Gamma(\omega)$ ，则模型均衡可类似定义

定义 3

竞争性均衡为 $(a(\omega), K, r, w)$ ，满足

- ① $a(w)$ 最大化

$$\max_{a \in [-we_1/r, \omega]} u(\omega - a) + \beta[\pi u(ra + we_1) + (1 - \pi)u(ra + we_2)]$$

- ② $K = \int_{\omega} a(\omega)\Gamma(d\omega)$

- ③ $r = f_k(K, L)$, $w = f_l(K, L)$, 且 $L = \pi e_1 + (1 - \pi)e_2$

均衡效率分析

- 与之前推导类似，可计算

$$\frac{dU(\omega)}{dK} = \beta \sum_{i=1}^2 \pi_i u'(f_k(K, L)a(\omega) + f_l(K, L)e_i) \left(\frac{a(\omega)}{K} - \frac{e_i}{L} \right) f_{kk}(K, L)K$$

- 进一步可重写为

$$\beta u'(f_k(K, L)a(\omega) + f_l(K, L)e_2) \left[\pi(\chi(\omega) - 1) \left(\frac{a(\omega)}{K} - \frac{e_1}{L} \right) + \frac{a(\omega)}{K} - 1 \right] f_{kk}(K, L)K$$

- 对 ω 足够低的消费者， $\frac{a(\omega)}{K} - \frac{e_1}{L}$ 与 $\frac{a(\omega)}{K} - 1$ 可能小于 0，故这类消费者未必偏好更低的 K

均衡效率分析

- 对于一个功利主义 (utilitarian) 社会计划者，加总福利变化可写为

$$\Delta \equiv \beta f_{kk}(K, L)K \int_{\omega} \sum_{i=1}^2 \pi_i u'(f_k(K, L)a(\omega) + f_l(K, L)e_i) \left(\frac{a(\omega)}{K} - \frac{e_i}{L} \right) \Gamma(d\omega)$$

- 考虑一个极端近似， $e_1 = e_2 = L$ ，则

$$\Delta = \beta f_{kk}(K, L)K \int_{\omega} u'(f_k(K, L)a(\omega) + f_l(K, L)L) \left(\frac{a(\omega)}{K} - 1 \right) \Gamma(d\omega)$$

一定为正： $f_{kk} < 0$ ，且 ω 低时，边际效用更高，故积分中权重更大

- 由此知，可能出现加总资本提高，能提高社会福利的可能，即均衡资本低于约束有效资本，换言之，可能出现加总资本不足，而非过剩

参考文献 I

- AIYAGARI, S. R. (1994): "Uninsured Idiosyncratic Risk and Aggregate Saving," *Quarterly Journal of Economics*, 109, 659–684.
- BEWLEY, T. F. (1980): "The Optimum Quantity of Money," in *Models of Monetary Economies*, ed. by J. Kareken and N. Wallace, Federal Reserve Bank of Minneapolis.
- (1986): "Stationary Monetary Equilibrium with A Continuum of Independently Fluctuating Consumers," in *Contributions to Mathematical Economics in Honor of Gérald Debreu*, ed. by W. Hildenbrand and A. Mas-Collel, Amsterdam: North Holland, chap. 5, 79–102.
- CHAMBERLAIN, G. AND C. A. WILSON (2000): "Optimal Intertemporal Consumption under Uncertainty," *Review of Economic Dynamics*, 3, 365–395.
- DÁVILA, J., J. H. HONG, P. KRUSELL, AND J.-V. RÍOS-RULL (2012): "Constrained Efficiency in the Neoclassical Growth Model with Uninsurable Idiosyncratic Shocks," *Econometrica*, 80, 2431–2467.
- DEATON, A. (1987): "Life-Cycle Models of Consumption: Is the Evidence Consistent with the Theory?" in *Advances in Econometrics: Fifth World Congress*, ed. by T. F. Bewley, New York: Cambridge University Press, vol. II, chap. 14, 121–148.
- HUGGETT, M. (1993): "The Risk-free Rate in Heterogeneous-Agent Incomplete-Insurance Economies," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 17, 953–969.
- KIMBALL, M. S. (1990): "Precautionary Saving in the Small and in the Large," *Econometrica*, 58, 53–73.
- KRUSELL, P. AND A. A. SMITH, JR. (1998): "Income and Wealth Heterogeneity in the Macroeconomy," *Journal of Political Economy*, 106, 867–896.

参考文献 II

- MARCET, A., F. OBIOLS-HOMS, AND P. WEIL (2007): "Incomplete Markets, Labor Supply and Capital Accumulation," *Journal of Monetary Economics*, 54, 2621–2635.
- PIJOAN-MAS, J. (2006): "Precautionary Savings or Working Longer Hours?" *Review of Economic Dynamics*, 9, 326–352.
- SCHECHTMAN, J. (1976): "An Income Fluctuation Problem," *Journal of Economic Theory*, 12, 218–241.
- SCHECHTMAN, J. AND V. L. ESCUDERO (1977): "Some Results on 'An Income Fluctuation Problem'," *Journal of Economic Theory*, 16, 151–166.