第六讲：

收益与风险

武汉大学本科金融学专业2018（秋）公司金融
授课人：刘岩

本讲内容

- 资产（证券）收益率。
- 资产组合理论。
- BDM 第 10-11 章，RWJ 第 10-11 章

资产收益率

- 金融资产（证券）都可以计算持有期的收益率。
- 假设资产第 t 期的现金流为 C_t；前一期现金流支付后资产的市场价格为 P_{t-1}，而当期现金流支付之后的市场价格为 P_t，则 $t-1$ 到 t 的资产持有收益率为

$$R_t = \frac{C_t + P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{C_t + P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

- 收益率的风险来源：
  C_t 本身的变动和价格 P_t, 的变动。

股票收益率

- 具体到股票，习惯性区分两种收益率。
- 股利收益率：D_t/P_{t-1}。
- 资本利得收益率：$(P_t - P_{t-1})/P_{t-1}$。
- 股票收益率为这两部分的和：

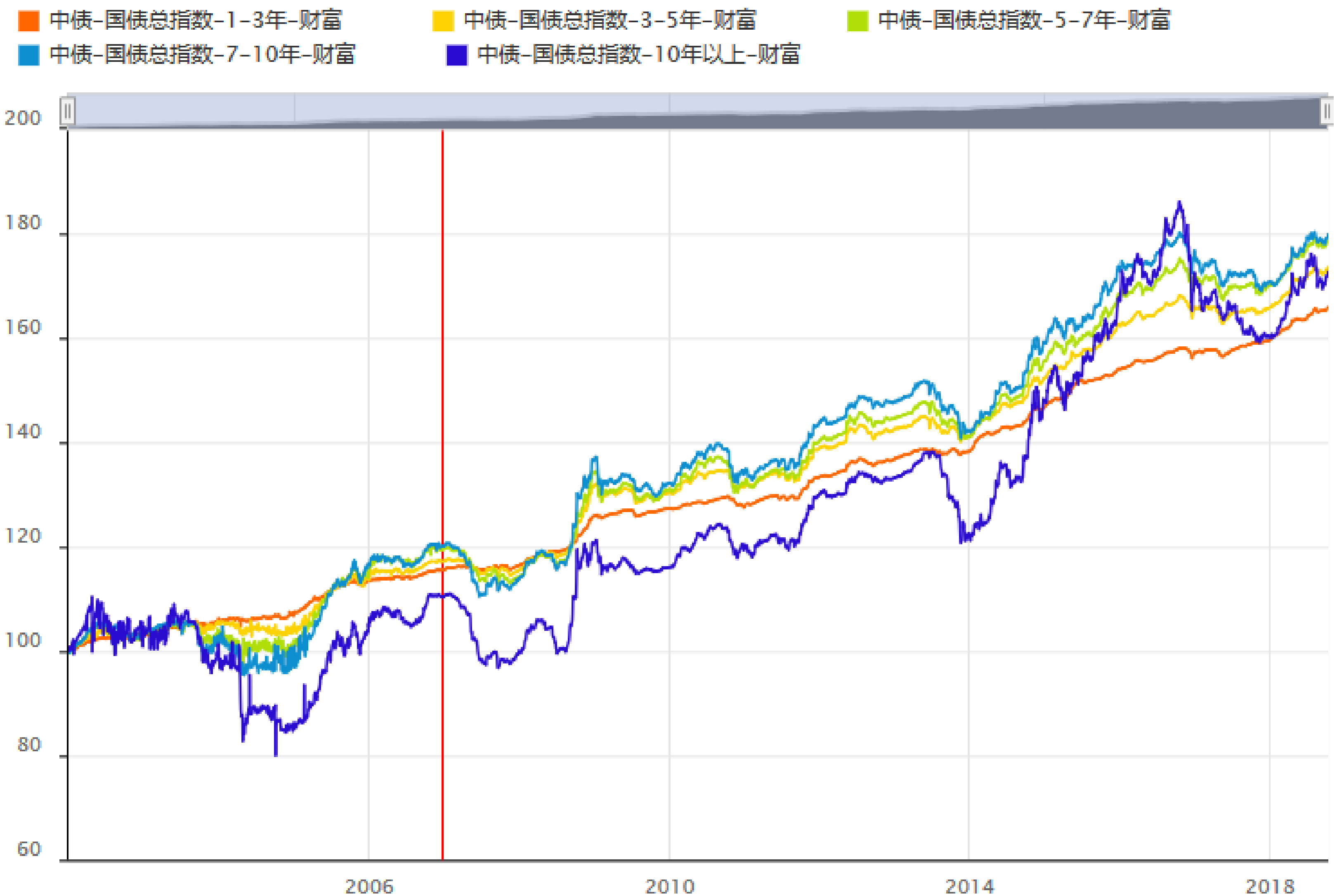
$$R_t = \frac{D_t}{P_{t-1}} + \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

- 在此基础上可定义持有期（累积）收益率：

$$(1 + R_1) \times (1 + R_2) \times \cdots \times (1 + R_T) - 1$$

这一公式对所有资产均适用。

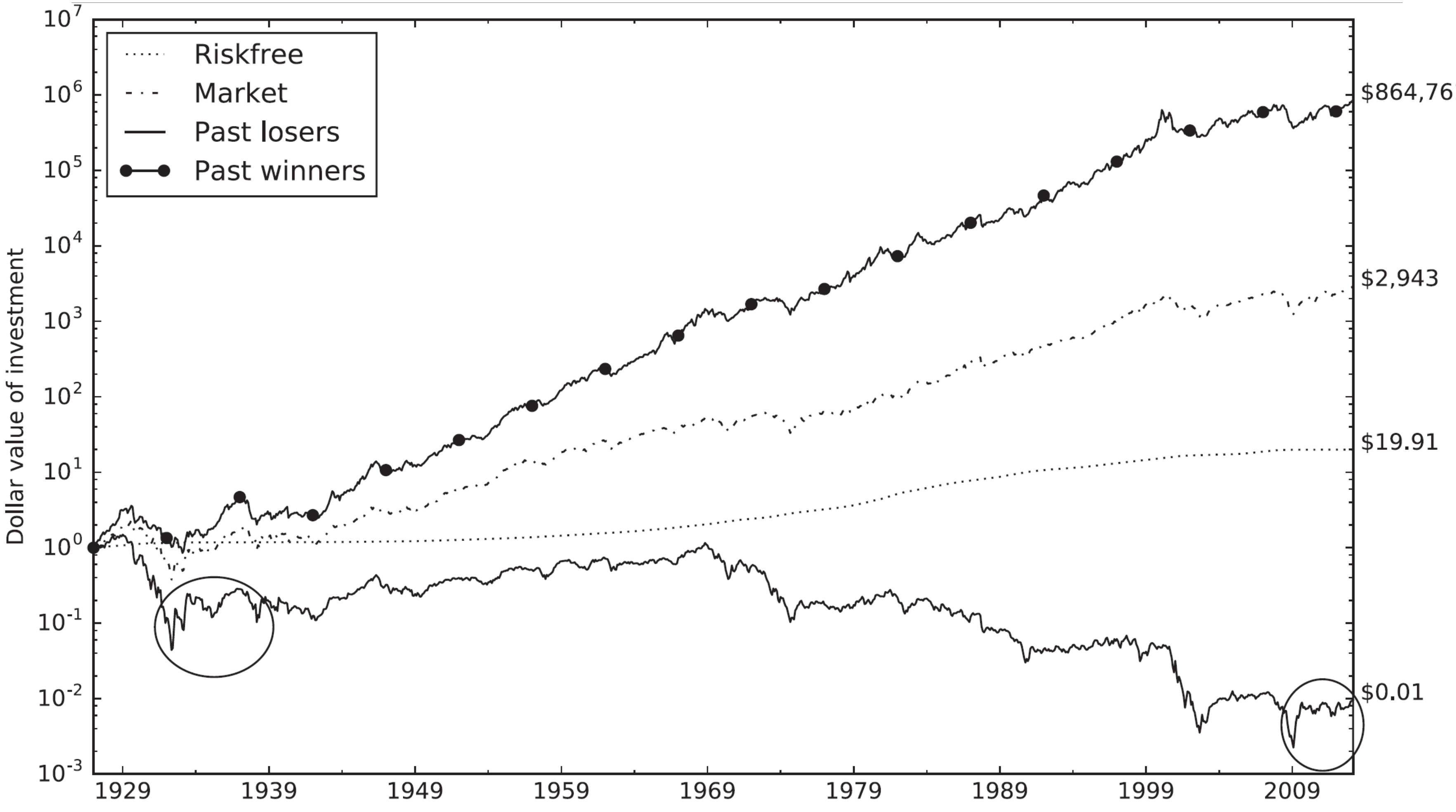
国债累积收益：2002-2018（中国债券网）



企业信用债累积收益：2007-2018

股票收益率：2009-2018（Wind）

美国证券市场累计收益



Daniel and Moskowitz 2016 JFE “Momentum Crashes”

收益率统计量

- 给定某一时期的收益率观测值：$R_t, t = 1, \ldots, T$。
- 收益率样本平均：

$$\bar{R} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t$$

- 收益率样本方差——度量风险的实用指标：

$$Var = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_t - \bar{R})^2$$

- 收益率样本标准差：$SD = \sqrt{Var}$

标准差与正态分布

- 如果收益率比 R_t 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，那么有下述常用概率数值：

$$\Pr(-\sigma \le R_t-\mu \le \sigma) \quad = 68.26\%$$
$$\Pr(-2\sigma \le R_t-\mu \le 2\sigma) = 95.44\%$$
$$\Pr(-3\sigma \le R_t-\mu \le 3\sigma) = 99.74\%$$

- 换言之，R_t 偏离总体均值超过 3σ 的概率为 0.26%。
- 作为最简单的近似，可以使用样本均值估计总体均值 $\hat{\mu}=\bar{R}$，用样本标准差估计总体标准差 $\hat{\sigma}=SD$。
- 美国 S&P-500 指数 1926-2008 年对应的平均收益率为 12.2%，标准差为 20.6%。

几何平均收益率和算数平均收益率

- 给定收益率样本：$R_t, t = 1, \dots, T$。
- 样本平均收益率是一个算数平均。
- 我们还可以定义几何平均收益率：

$$R^g = [(1 + R_1) \times (1 + R_2) \times \cdots \times (1 + R_T)]^{1/T} - 1$$

这也就是累积收益对应的年化收益率。

- 可以证明一般情况下 $R^g < \bar{R}$（几何平均不等式）。
- 但当样本值 R_t 都不大时，有 $R^g \approx \bar{R}$。

收益率的概率特征

- 每一个资产的收益率都在随时间变动，而且这种变动是事前不确定的（ex ante uncertain）。
- 收益率的这种特征可以通过随机变量（random variable）来描述。
- 假设一个资产的收益率可以用随机变量 R 来表示（注意区分随机变量和随机变量的特定实现值）， R 的取值范围为 $[-1,\infty)$，具有分布函数 $F(\cdot)$。
- R 的所有概率特征都由 F 所反映：如期望 $\mathbb{E}R$，方差 $\mathrm{var}(R)=\mathbb{E}[R-\mathbb{E}R]^2=\mathbb{E}[R^2]-(\mathbb{E}R)^2$，标准差 $\sigma_R=\sqrt{\mathrm{var}(R)}$。

多个资产收益率的相关性

- 在最简单的情形，考虑两个资产 A 和 B，随机收益率分别为 R_A 和 R_B。
- 两个资产收益率的协方差：

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(R_A,R_B) &= \mathbb{E}[(R_A-\mathbb{E}R_A)(R_B-\mathbb{E}R_B)]\\ &= \mathbb{E}[R_AR_B]-\mathbb{E}R_A\mathbb{E}R_B\end{aligned}$$

- 两个资产收益率的相关系数：

$$\rho_{AB}=\frac{\operatorname{cov}(R_A,R_B)}{\sigma_A\sigma_B}=\frac{\operatorname{cov}(R_A,R_B)}{\sqrt{\operatorname{var}(R_A)\operatorname{var}(R_B)}}$$

其中 σ_A,σ_B 分别表示 R_A,R_B 的标准差。

资产组合的收益率：两个资产情形

- 容易验证，w_A 单位 A 和 w_B 单位 B 构成的资产组合（asset portfolio）的收益率为 $w_A R_A + w_B R_B$。
- 由期望的线性性可知：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[w_A R_A + w_B R_B] &= w_A \mathbb{E}[R_A] + w_B \mathbb{E}[R_B] \\
\mathrm{var}(w_A R_A + w_B R_B) &= w_A^2 \mathrm{var}(R_A) + w_B^2 \mathrm{var}(R_B) \\
&\quad +2 w_A w_B \mathrm{cov}(R_A, R_B) \\
&= w_A^2 \mathrm{var}(R_A) + w_B^2 \mathrm{var}(R_B) \\
&\quad +2 w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}
\end{aligned}
$$

- 当 $\rho_{AB} \neq 1$ 时，其资产组合的标准差（风险）小于两个资产分别的标准差之和。此时两个资产可以相互对冲（hedge）彼此的风险。

资产组合的收益率：一般情形

- 考虑 n 个资产 R_i，每个资产在资产组合中的份额为 w_i，$i = 1, \ldots, n$。
- 用黑体字母 $\boldsymbol{R} = [R_1, \ldots, R_n]'$ 表示收益率随机（列）向量，$\boldsymbol{w} = [w_1, \ldots, w_n]'$ 表示份额（列）向量，则资产组合可以表示为向量（矩阵）乘积 $\boldsymbol{w}'\boldsymbol{R}$。
- $\boldsymbol{R}$ 期望记为 $\boldsymbol{\mu}$：

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}R_1 \\ \vdots \\ \mathbb{E}R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}.$$

- 资产组合收益率的期望收益率为

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{w}'\boldsymbol{R}] = \boldsymbol{w}'\mathbb{E}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{w}'\boldsymbol{\mu}.$$

收益率向量的协方差矩阵

- 随机收益率向量 $\boldsymbol{R}$ 的<u>协方差矩阵</u>定义为：

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{cov}(R_1, R_1) & \cdots & \mathrm{cov}(R_1, R_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{cov}(R_n, R_1) & \cdots & \mathrm{cov}(R_n, R_n) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbb{E}(R_1 - \mu_1)(R_1 - \mu_1) & \cdots & \mathbb{E}(R_1 - \mu_1)(R_n - \mu_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{E}(R_n - \mu_n)(R_1 - \mu_1) & \cdots & \mathbb{E}(R_n - \mu_n)(R_n - \mu_n) \end{bmatrix}$$

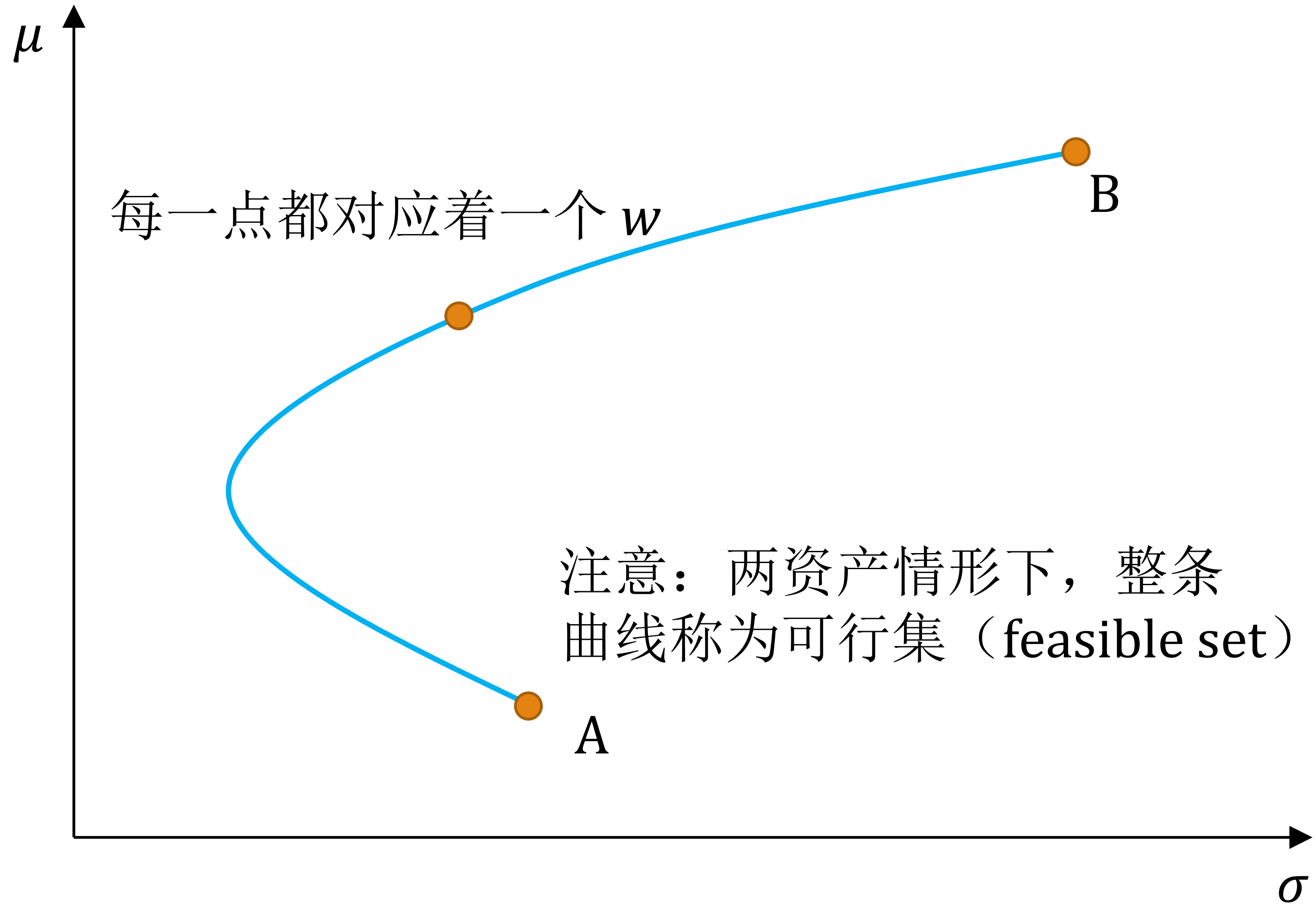
资产组合的方差：一般情形

- 随机向量 $\boldsymbol{R}$ 的协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 也可以表示为：
$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{E}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})'.$$
- 资产组合收益率的方差 σ_w^2 为
$$\begin{aligned}\mathrm{var}(\boldsymbol{w}'\boldsymbol{R}) &= \mathbb{E}(\boldsymbol{w}'\boldsymbol{R}-\boldsymbol{w}'\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{w}'\boldsymbol{R}-\boldsymbol{w}'\boldsymbol{\mu}) \\ &= \mathbb{E}[\boldsymbol{w}'(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{w}] \\ &= \boldsymbol{w}'\mathbb{E}[(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})']\boldsymbol{w} \\ &= \boldsymbol{w}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}.\end{aligned}$$
- 因此，资产组合收益率的方差 σ_w^2 为权重向量 $\boldsymbol{w}$ 的一个二次型函数。

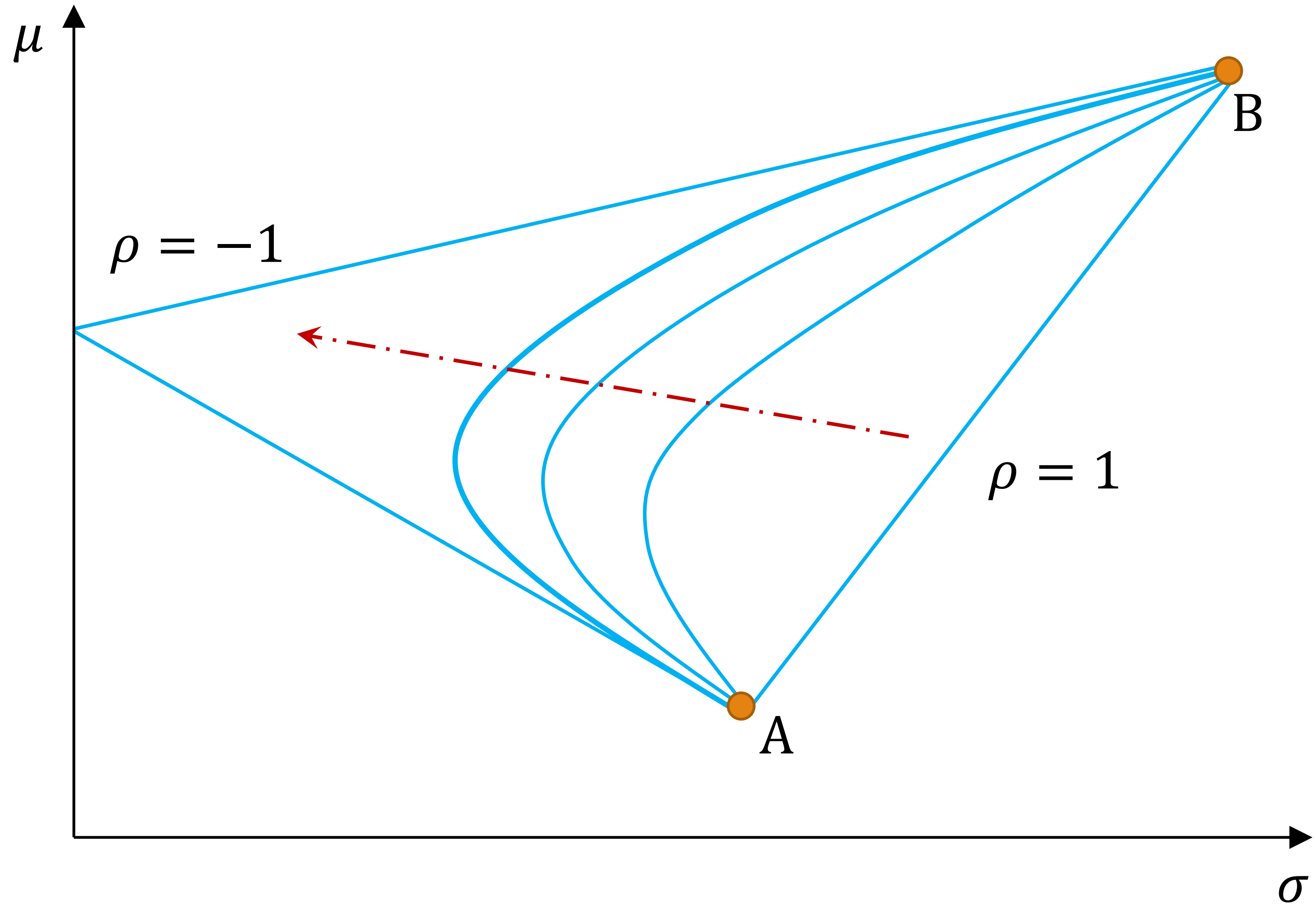
资产组合的可行集：两个资产情形

- 假设投资者有￥1，要投资在两种资产 A 和 B 上，分别为 $w_A = w, w_B = 1 - w$。
- 这个资产组合 R_w 的期望收益率为
$$\mu_w = \mathbb{E}R_w = w\mathbb{E}[R_A] + (1 - w)\mathbb{E}[R_B]$$
- R_w 的方差 σ_w^2 为
$$\text{var}(R_w) = w^2\sigma_A^2 + (1 - w)^2\sigma_B^2 + 2w(1 - w)\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B$$
- 可以注意到，当 w 变动时， μ_w 和 σ_w^2 都在变动。更进一步的，我们可以把 w 表示为 μ_w 的线性函数，从而把 σ_w^2 表示为 $\mathbb{E}R_w$ 的二次函数。
- 如此得到的 μ_w 与σ_w^2或 σ_w 间的关系称为资产组合的可行集（feasible set）。

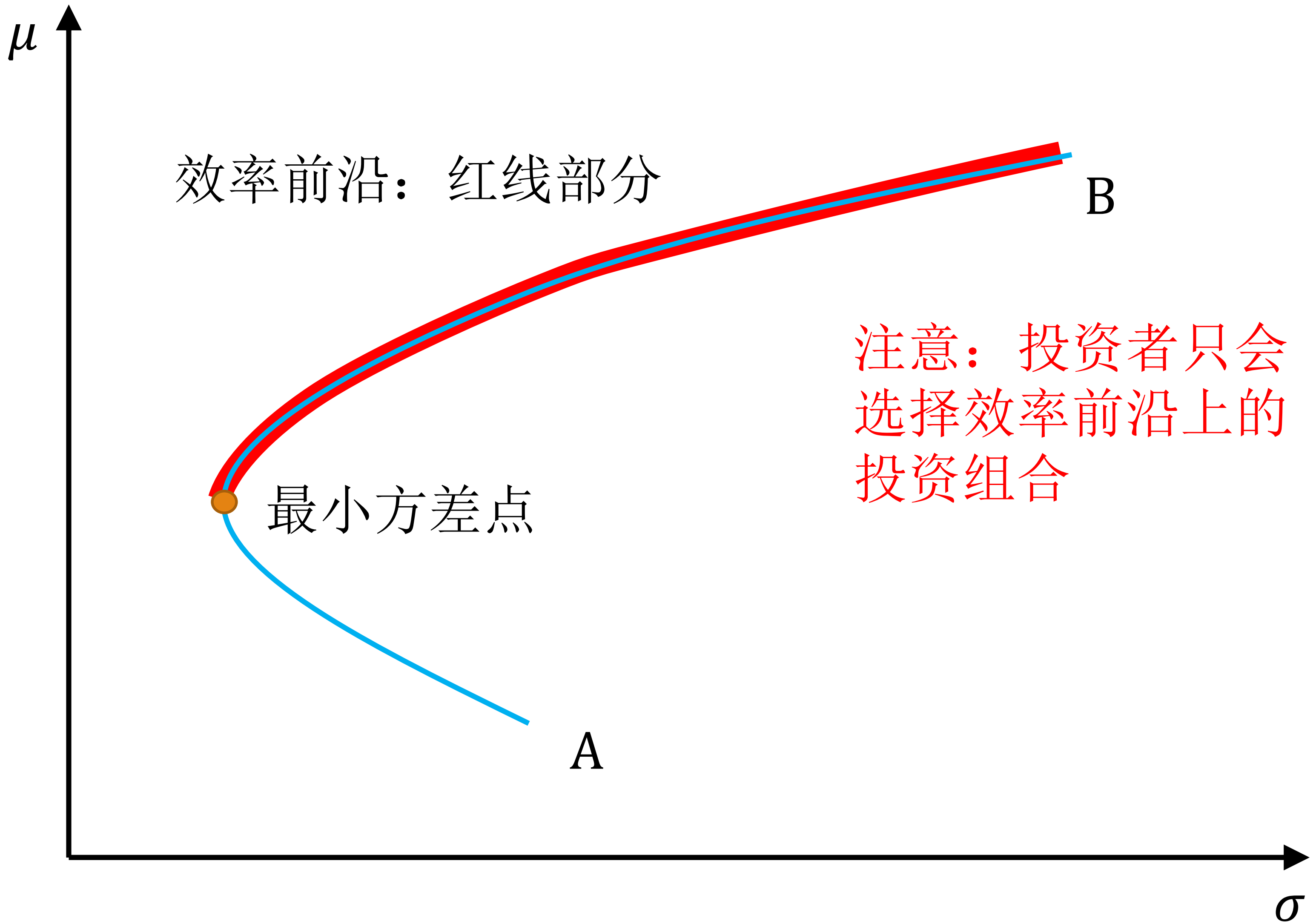
两资产组合示意



组合边界随相关系数的变动



两资产最小方差组合示例



注意：投资者只会选择效率前沿上的投资组合

资产组合有效边界：一般情形

- 当资产数目 $n \geq 3$ 时，资产组合的期望收益-风险关系可以通过求解下列最优化问题得到：

$$\sigma_e^2 = \min_{\boldsymbol{w}} \operatorname{var}(\boldsymbol{w}'\boldsymbol{R}) = \min_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{w}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}$$

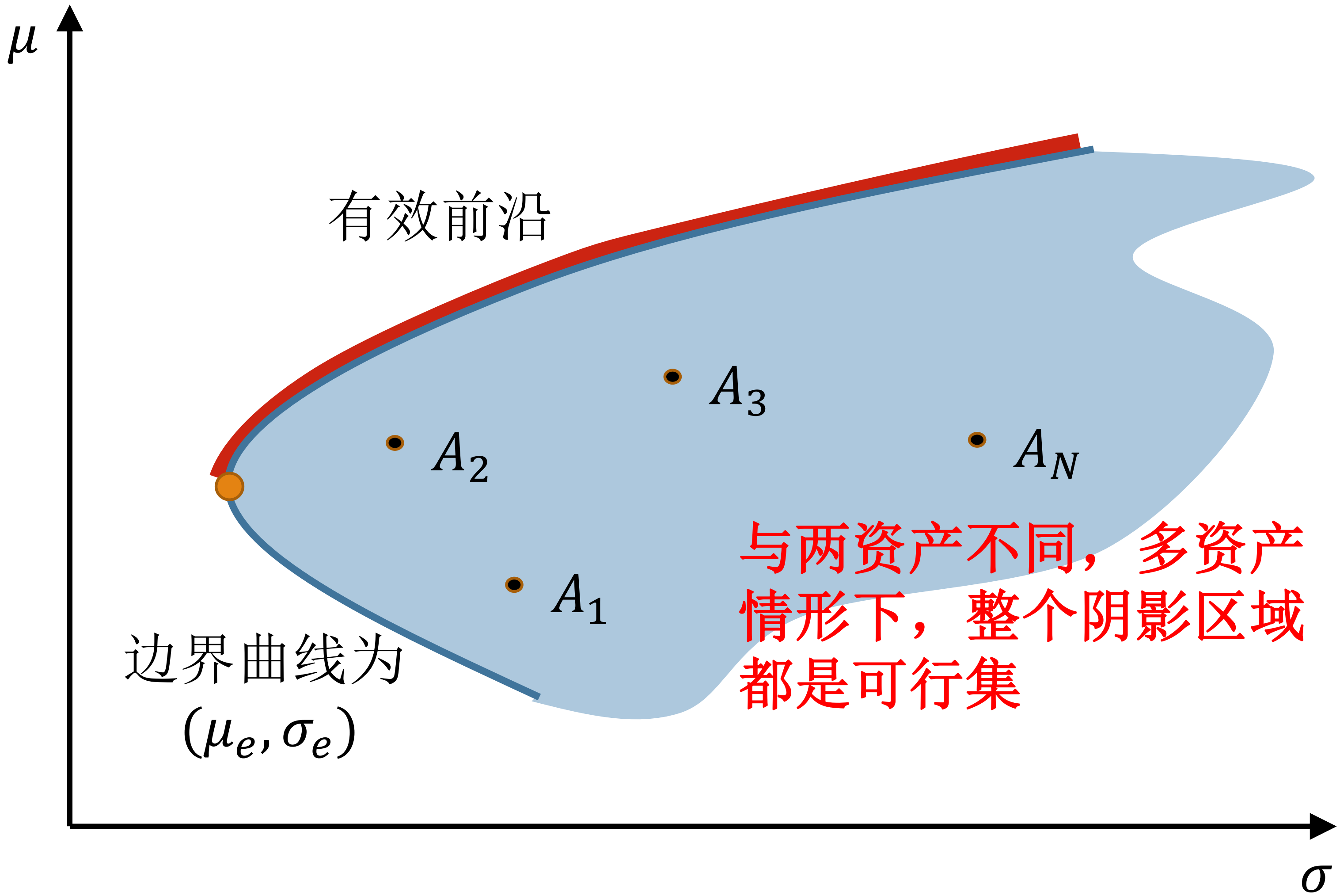
$$s.t.\ \boldsymbol{w}'\mathbb{E}\boldsymbol{R} = \mu_e \text{ 且 } \boldsymbol{w}'\boldsymbol{1} = 1$$

其中 $\boldsymbol{1}$ 表示每个位置取 1 的列向量。以 $\boldsymbol{w}_e$ 表示上述问题的最优解。

- 当资产组合 $\boldsymbol{w}_e'\boldsymbol{R}$ 的期望收益 μ_e 变化时，资产组合的标准差 σ_e 也会相应变化，从而可以再次得到 (μ_e, σ_e) 组合界定的可行集。特别的，σ_e 关于 μ_e 下凸。

- 在方差最小点（对所有期望收益 μ_e 而言）之上的可行集边界称为有效前沿。

多资产组合



与两资产不同，多资产情形下，整个阴影区域都是可行集

资产组合的本质

- 每一个资产的收益率都可以看做是两部分构成：
$$R_i = \underbrace{\mathbb{E}R_i}_{\text{期望收益率}} + \underbrace{U_i}_{\text{随机扰动}}$$
其中未预期随机扰动满足 $\mathbb{E}U_i = 0$。
- 未预期部分可以进一步分解：$U_i = m + \epsilon_i$，其中 m 代表系统风险，为所有资产所共有；而 ϵ_i 代表资产 i 的个体异质性风险，互相独立且与 m 无关。
- 资产组合可以消除异质性风险：例如 $w_i = 1/n$ 时，可以说明 $\mathrm{var}(\boldsymbol{w}'\boldsymbol{R}) \to \sigma_m^2$，当 $n \to \infty$；而单个资产的方差为 $\sigma_m^2 + \sigma_\epsilon^2$。

无风险借贷与资产组合

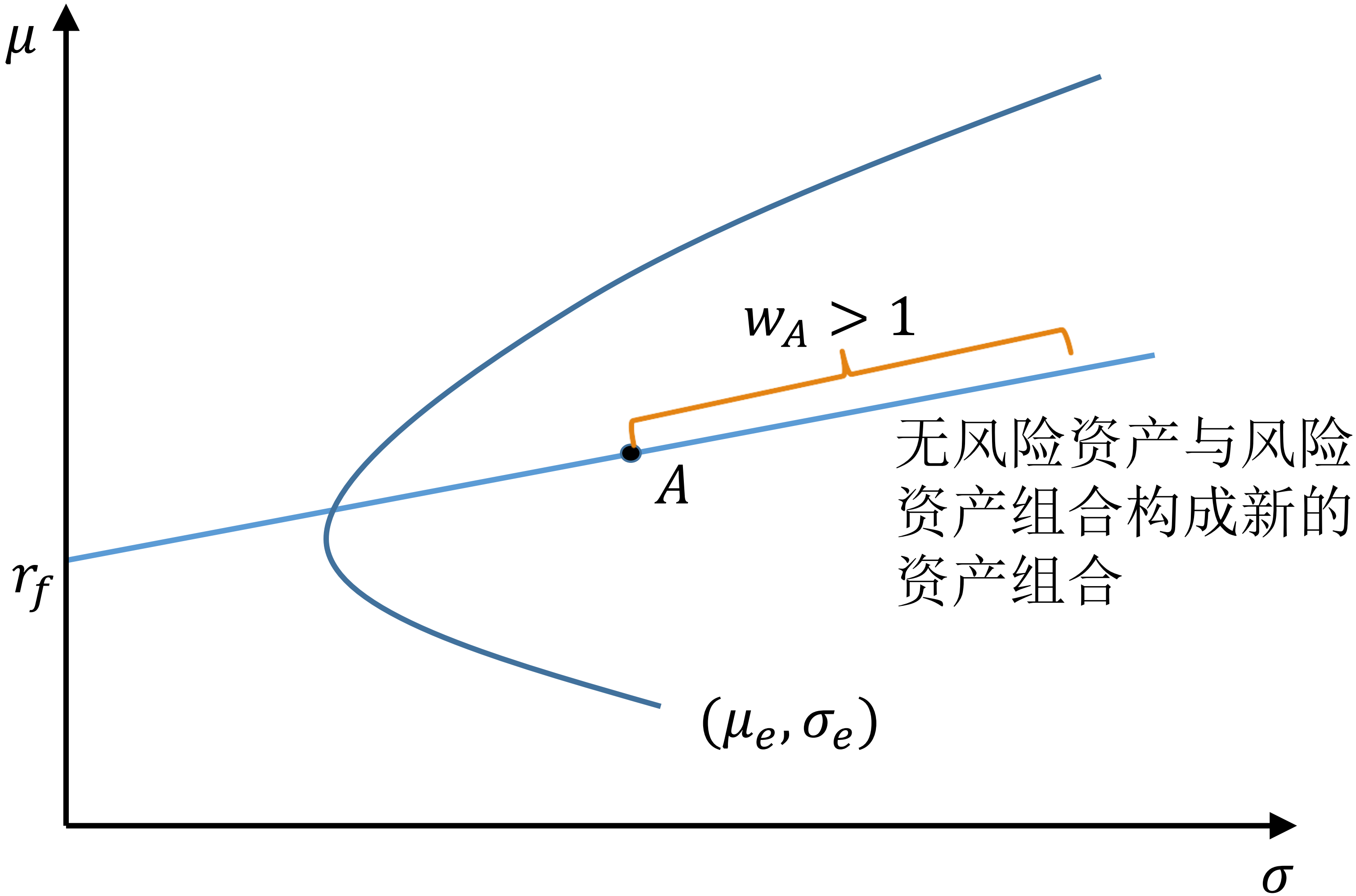
- 现在考虑一个无风险资产和一个有风险资产的组合，前者的收益率为 R_f 而后者的收益率为 R_A。
- 继续考虑持有 w_A 份的风险资产和 $1-w_A$ 份的无风险资产，则此组合的预期收益率及风险为

$$\mathbb{E}R_w = w_A \mathbb{E}R_A + (1-w_A)R_f$$

$$\sigma_w = w_A \sigma_A$$

- 显然可见，若风险资产的预期收益率 $\mathbb{E}R_A$ 高于 R_f，那么资产组合的预期收益总是随风险的上升而上升。
- 当 $w_A \geq 1$ 时，$1-w_A \leq 0$，表示投资人在借钱购买风险资产（杠杆投资）。

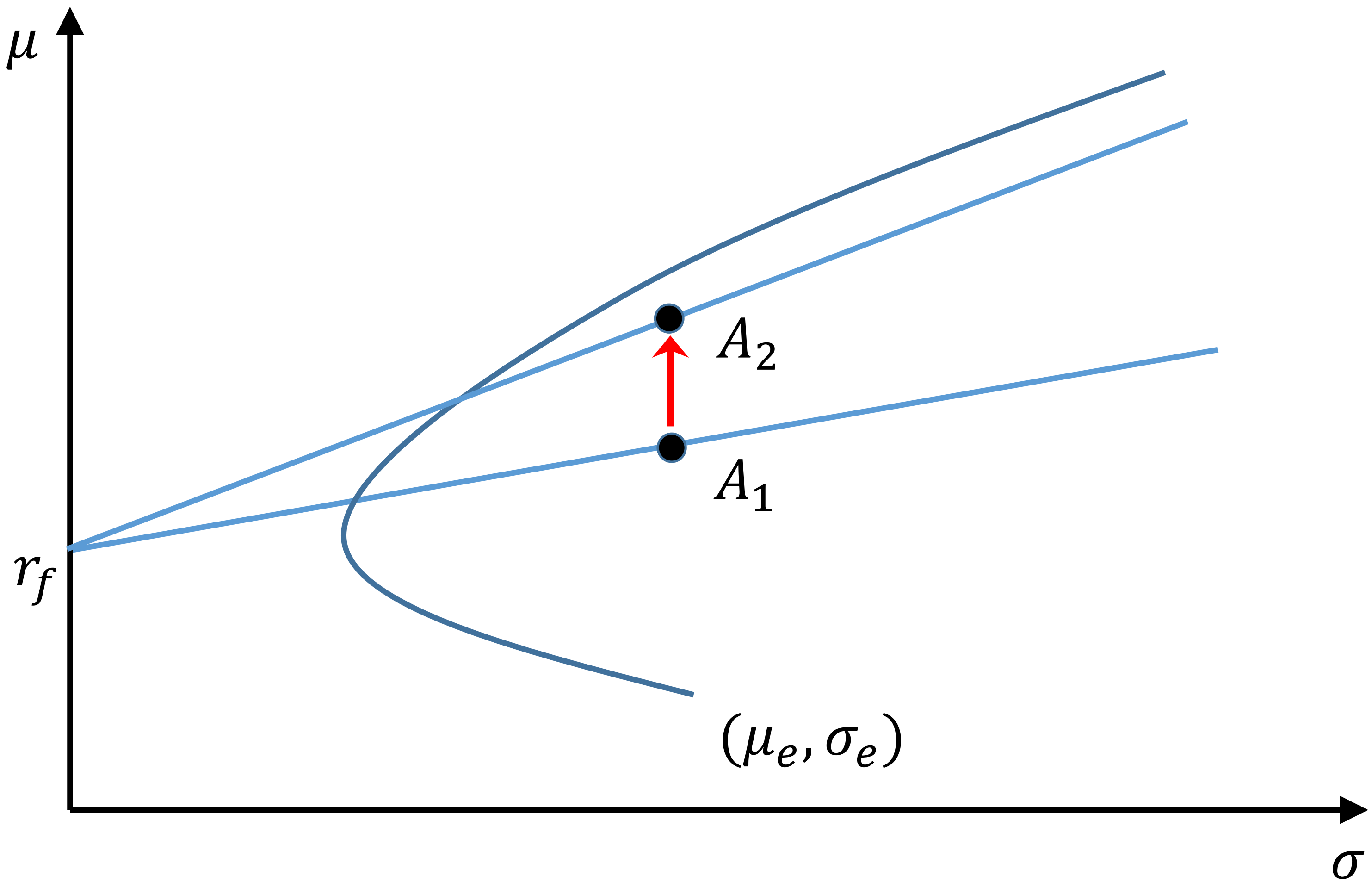
无风险资产与风险资产组合示意



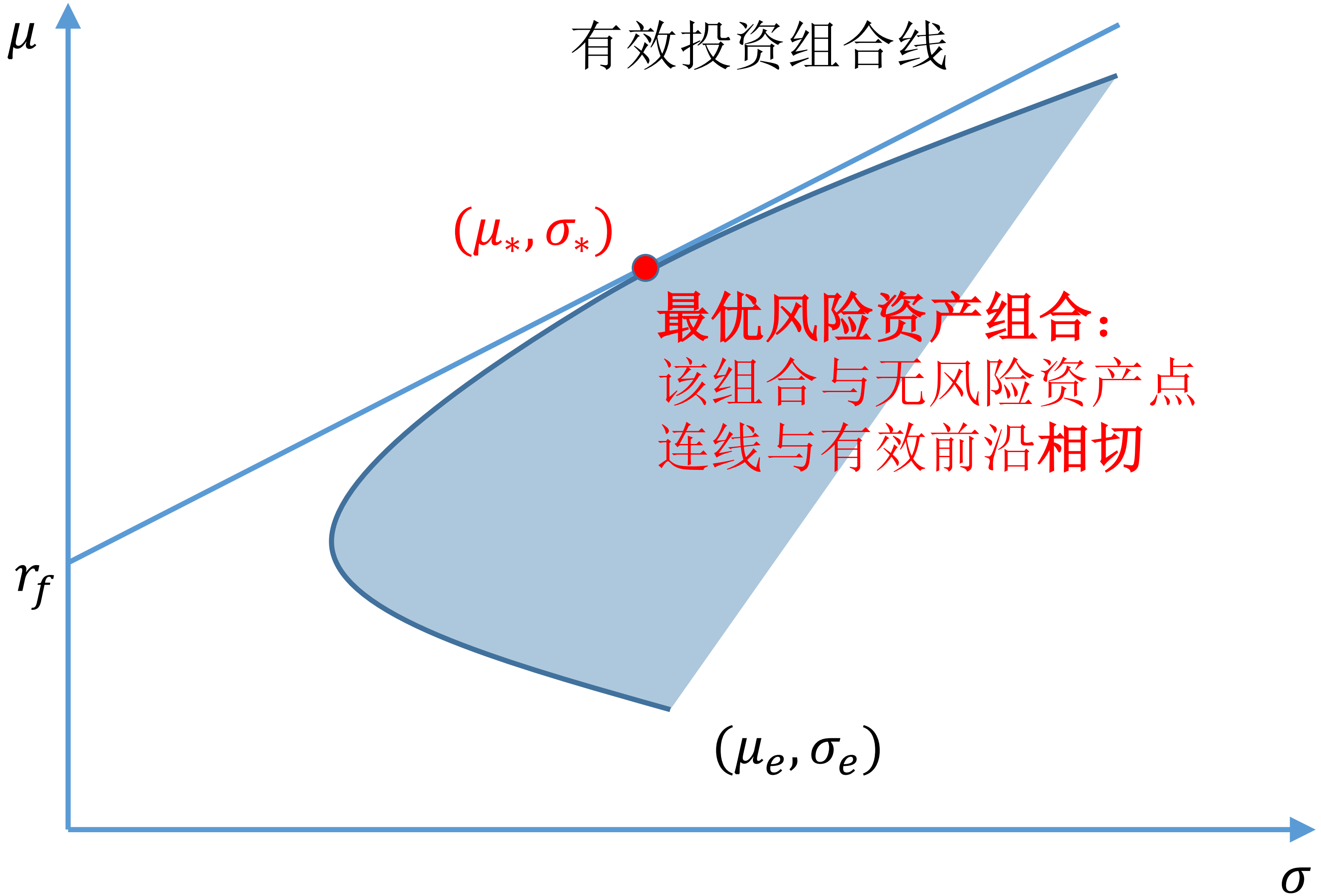
最优风险资产组合

- 投资者的问题包括两部分：挑选合适的风险资产组合 $\boldsymbol{w}'\boldsymbol{R}$，达到一定的风险资产预期收益与风险组合 (μ_A,σ_A)，同时选择合适的无风险资产（持有或者介入），以其满足风险-收益偏好。
- 首先，投资者不会选择可行集内部的风险资产组合 (μ_A,σ_A)，而一定会选择有效前沿上的组合 (μ_e,σ_e)。
- 其次，投资者一定会选择让无风险-风险组合线与风险资产组合可行集——实质是有效前沿——相切，由此确定最优风险资产组合 $A_* = (\mu_*,\sigma_*)$。
- 最终，投资者根据 A_* 和 r_f 确定最终资产组合 w_A^*。

风险资产组合最优选择示意



最优风险资产组合示意


μ
有效投资组合线
(μ_*, σ_*)
最优风险资产组合：
该组合与无风险资产点
连线与有效前沿**相切**
r_f
(μ_e, σ_e)
σ