经济增长理论

第九讲：Solow模型

授课人：刘 岩

2024年4月30日

Solow模型：理论

Solow模型

- 1924.8.23 – 2023.12.21
- PhD: Havard, career: MIT
- Robert Solow (1956) “A Contribution to the Theory of Economic Growth,” *Quarterly Journal of Economics*
  - 基础框架：生产、储蓄/投资与资本积累
- Robert Solow (1957) “Technical Change and the Aggregate Production Function,” *Review of Economics and Statistics*
  - 全要素生产率：经济增长的“源泉”
    - ✓ “源泉”：还有更本质的根源

Solow模型：基本假设

- 封闭经济，单一同质商品
  - 没有对外贸易与资本流动，且消费品与资本品可以1-1转换
- 人口增长率n为常数：$L_{t+1}/L_t = 1 + n$，且所有人口参与生产
- 储蓄等于投资：储蓄完全用于资本积累，且没有中间损耗
  - 储蓄还可以是单纯价值储藏（如储藏粮食）形式，此处不考虑
  - 没有中间损耗，意味着有完美的金融中介体系
- 加总生产函数：社会总产出由加总资本与加总劳动决定，$Y_t = F(K_t, L_t)$，且生产函数满足单调性、凹性与一次齐次性质
  - $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L),\ \forall \lambda > 0$
  - 典型特例CD生产函数：$F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$，其中$\alpha \in (0,1)$表示资本收入份额
- 常数储蓄率：社会总储蓄/总投资为$S_t = I_t = sY_t$，其中s表示常数储蓄率
  - 下次课讲单部门最优增长模型，将通过家庭跨区决策内生化储蓄率

资本积累与人均表示

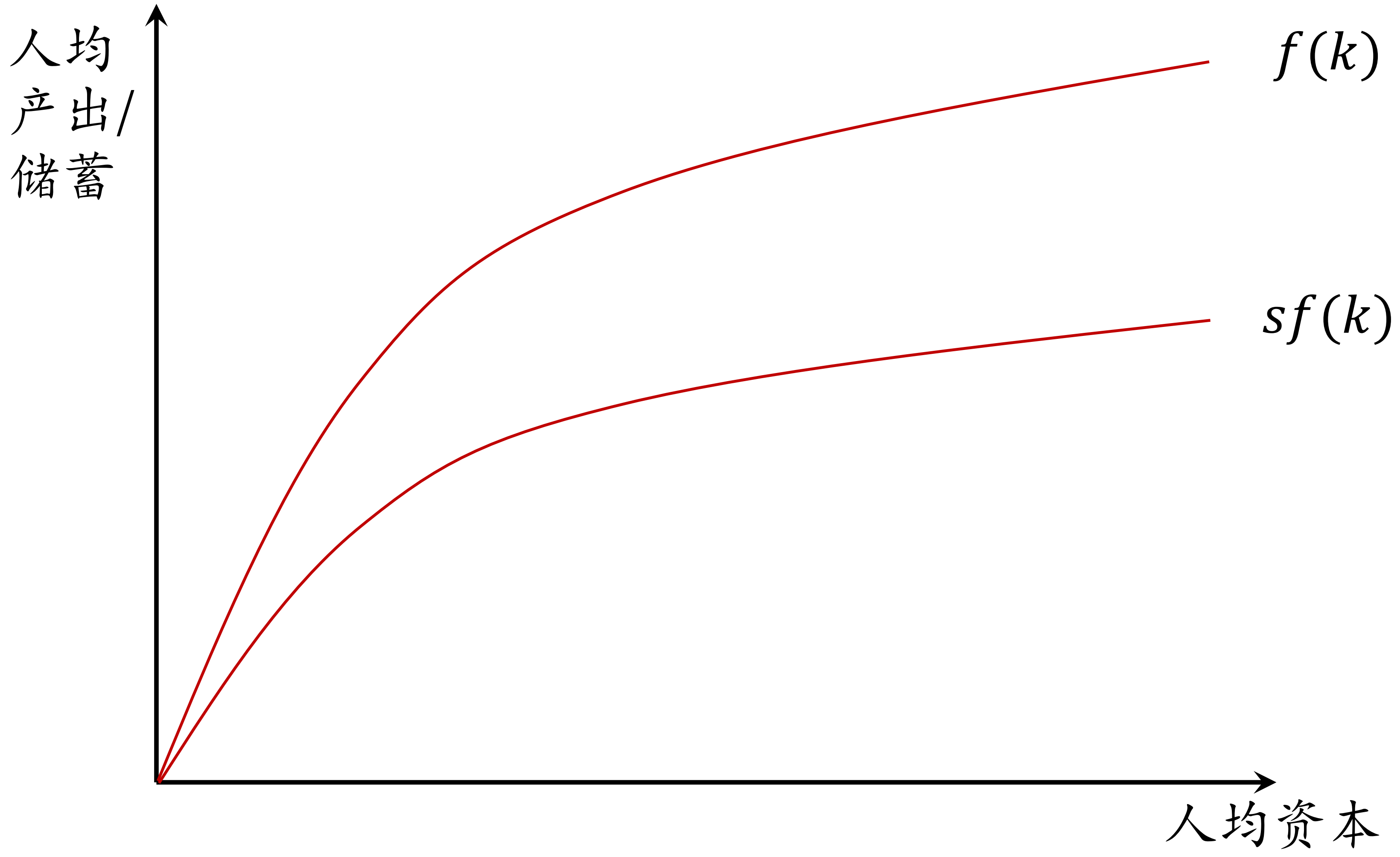
- 资本积累方程：$K_{t+1}=(1-\delta)K_t+I_t=(1-\delta)K_t+sY_t$
  - 其中，$\delta\in(0,1)$表示常数资本折旧率
- 封闭经济：消费等于产出减去投资/储蓄，即$C_t=Y_t-sY_t=(1-s)Y_t$
- 利用生产函数的一次齐次性质，人均资本存量可表示为

$$\frac{K_{t+1}}{L_t}=\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}}\frac{L_{t+1}}{L_t}=k_{t+1}(1+n)=(1-\delta)k_t+\frac{sY_t}{L_t}=(1-\delta)k_t+\frac{sF(K_t,L_t)}{L_t}$$

$$=(1-\delta)k_t+sF\left(\frac{K_t}{L_t},1\right)\equiv(1-\delta)k_t+sf(k_t)$$

  - 其中$f(k_t)\equiv F(k_t,1)$
  - CD生产函数下：$f(k_t)=k_t^\alpha$，$(1+n)k_{t+1}=(1-\delta)k_t+sk_t^\alpha$

图示：人均生产与储蓄函数



Solow模型稳态

- 模型稳态：人均资本存量保持不变，即$k_{t+1}=k_t=k^*$
  - 由于人口增长增长率为n，此时资本总量$K_t=L_tk^*=L_0(1+n)^tk^*$随时间增长
- 稳态人均资本存量满足

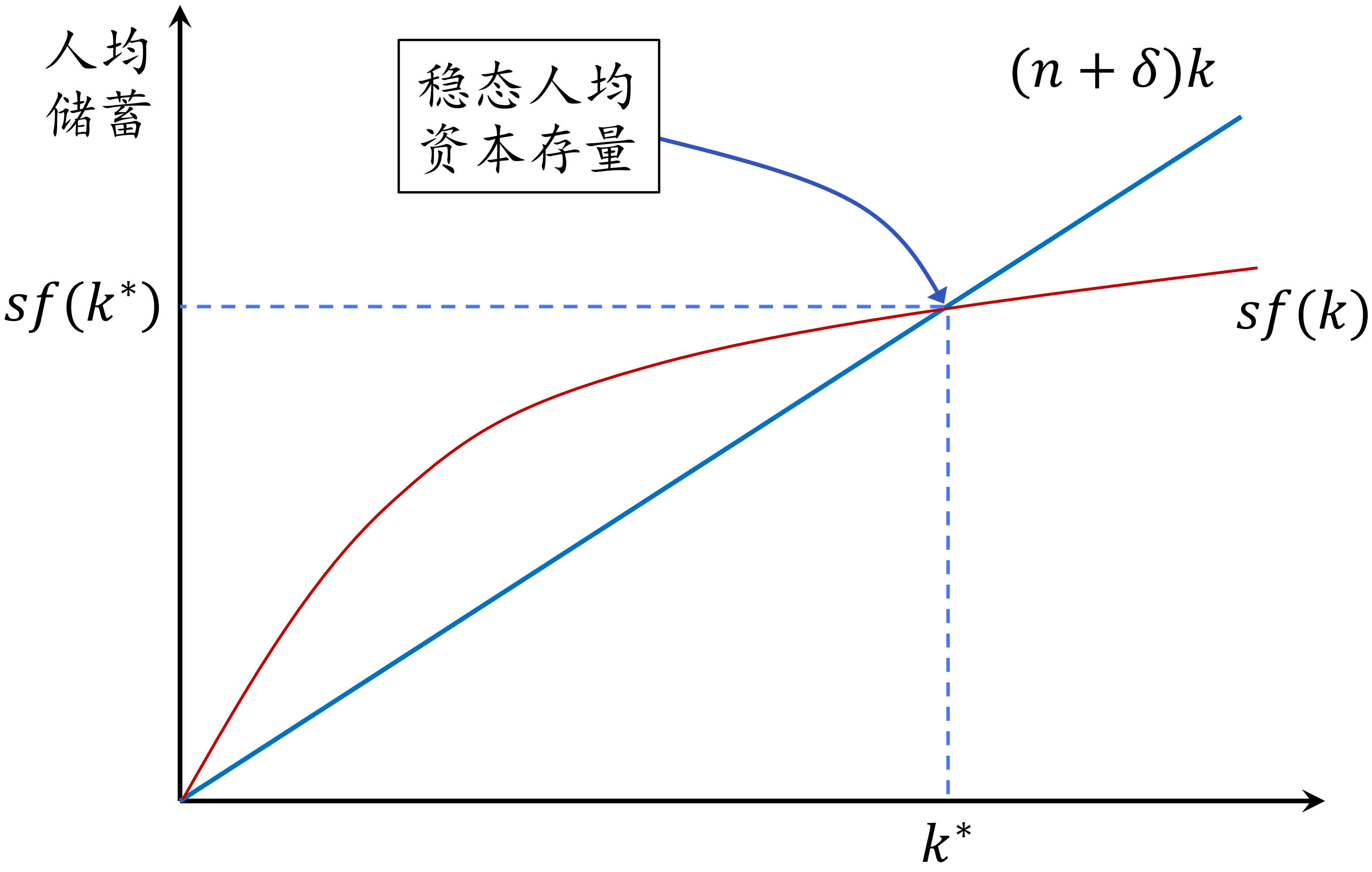
$$(1+n)k^*=(1-\delta)k^*+sf(k^*)\Leftrightarrow(n+\delta)k^*=sf(k^*)$$

- CD生产函数下，上述方程有如下形式

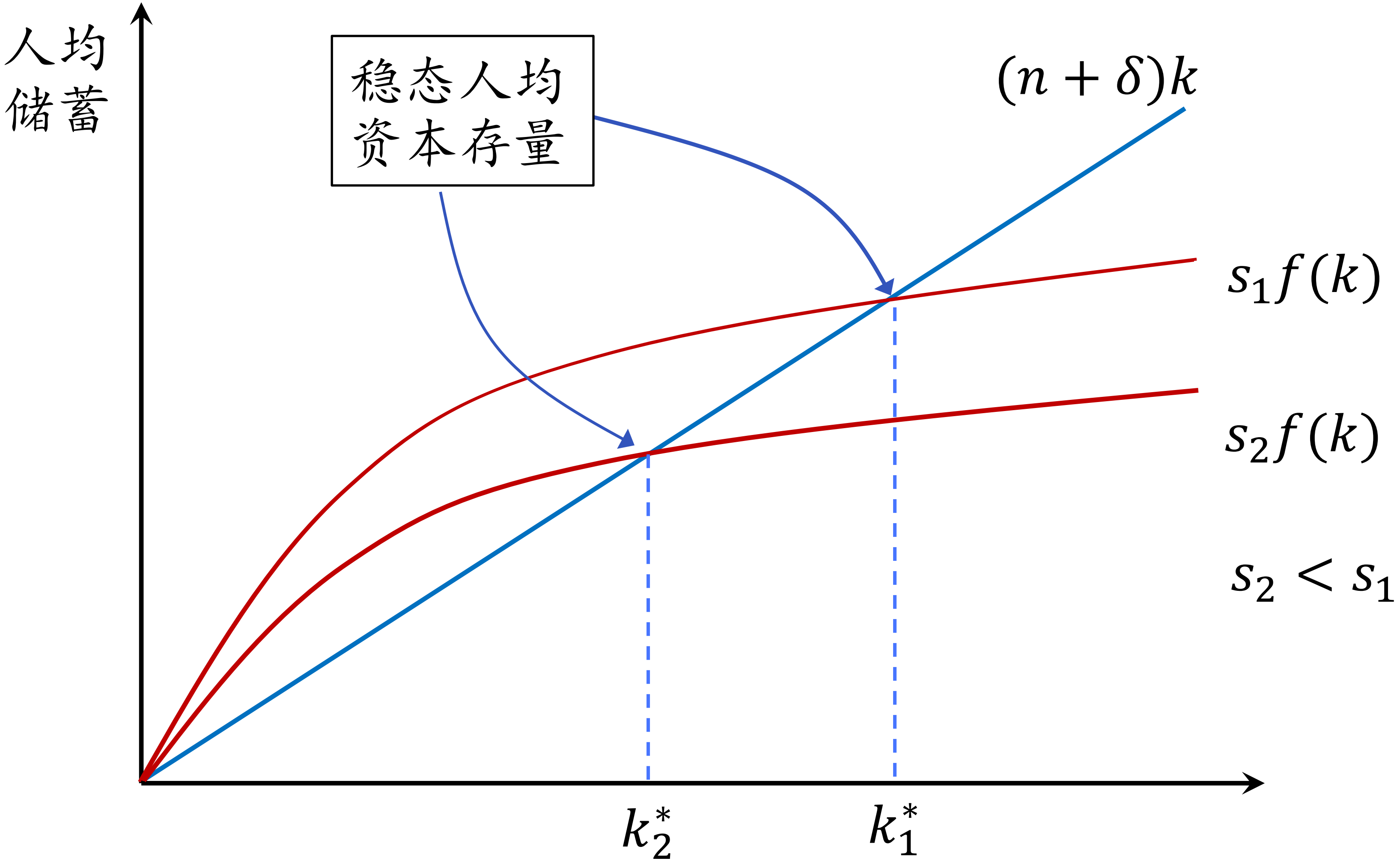
$$(n+\delta)k^*=sk^{*\alpha}\Longrightarrow k^*=\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

  - 由$1-\alpha>0$可知，稳态人均资本存量k^*是s的增函数，n和δ的减函数
  - 在一般的生产函数假设（单调性、凹性、一次齐次性）下，上述结论依然成立

图示：Solow模型稳态



图示：储蓄率的变化



资本积累的动态特征

- 人均资本积累方程

$$k_{t+1} = G(k_t) \equiv \frac{(1-\delta)k_t + sf(k_t)}{1+n}$$

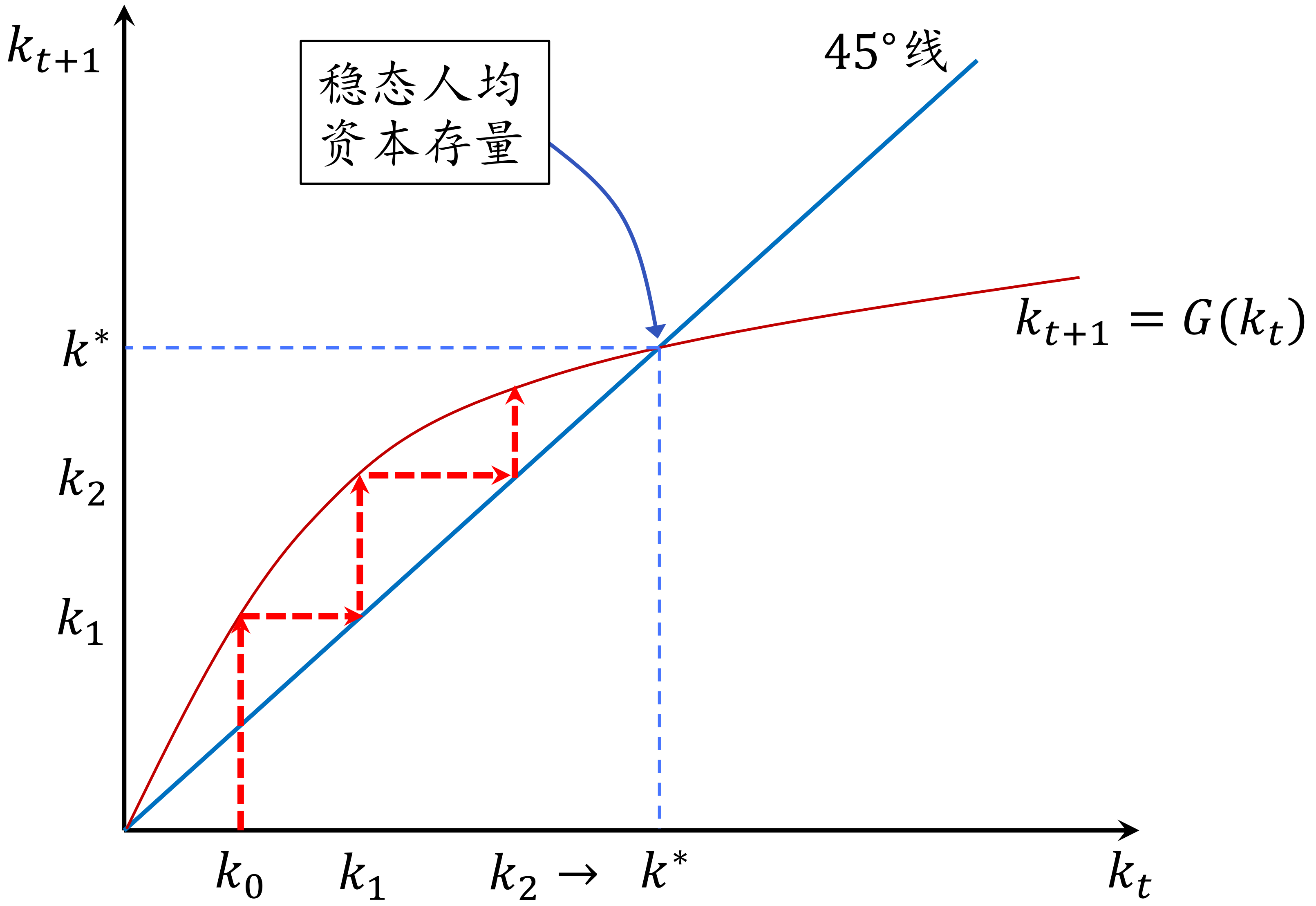
- CD生产函数下$G(k_t) = \frac{(1-\delta)k_t + sk_t^{\alpha}}{1+n}$，满足$G(0) = 0$，一阶导为

$$G'(k_t) = \frac{1-\delta+s\alpha k_t^{\alpha-1}}{1+n} \Rightarrow G'(k^*) = \frac{1}{k^*}\frac{(1-\delta)k^* + s\alpha k^{*\alpha}}{1+n} < \frac{1}{k^*}k^* = 1$$

- 且由$G''(k_t) < 0$，可知当$k_t < k^*$时$G'(k_t) > G'(k^*)$，当$k_t > k^*$时$G'(k_t) < G'(k^*)$

- 上述性质对一般的生产函数（单调、凹、一次齐次）同样成立

图示：Solow模型人均资本动态



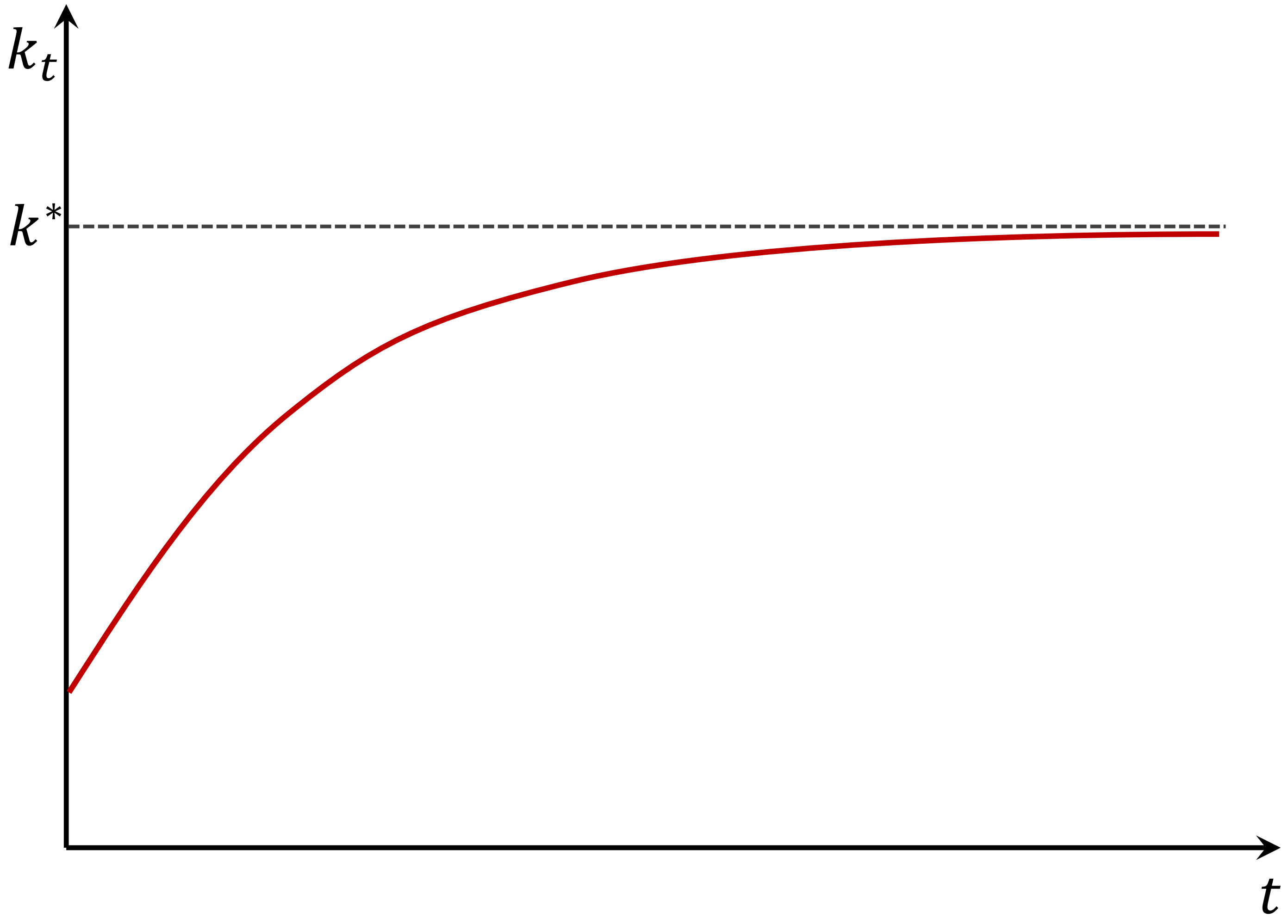
转移路径与增长率的变化

- 假设$k_0 < k^*$，则$k_0, k_1, \ldots$序列单调递增收敛到k^*，$\lim_{t\to\infty} k_t = k^*$，其中$k_{t+1} = G(k_t)$，$\forall t \geq 0$，上述收敛过程，称为转移路径(transition path)
  - 这不是Solow模型的特性，而是一大类新古典经济增长模型共有的理论性质
- 转移路径上，相应的资本增长率（CD生产函数下）为

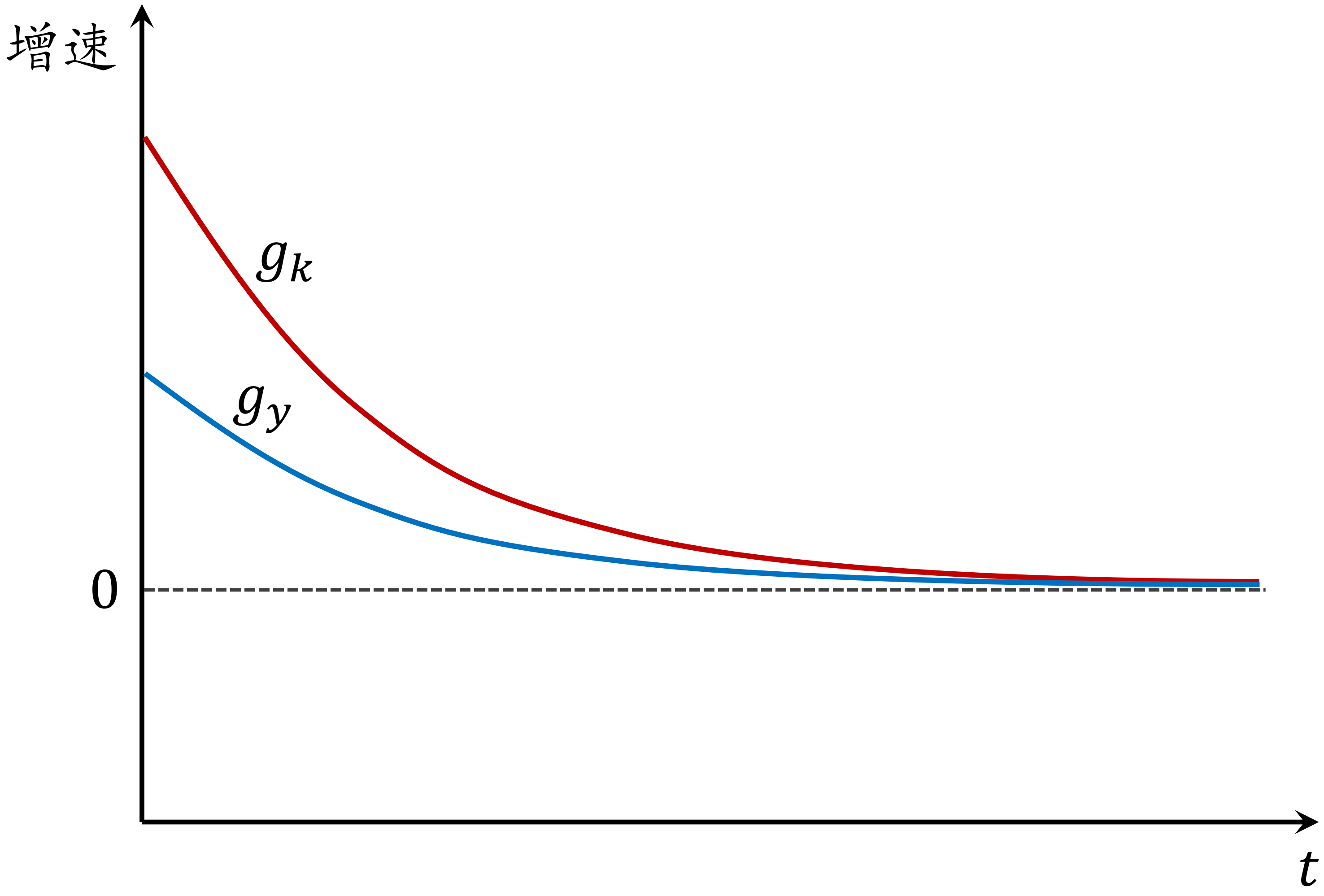
$$\frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{G(k_t)}{k_t} = \frac{1-\delta+sk_t^{\alpha-1}}{1+n} \downarrow k_t$$

- 故资本增长率随k_t的增加而下降
- 人均产出$y_t = k_t^\alpha \Rightarrow \ln y_t = \alpha \ln k_t \Rightarrow \frac{y_{t+1}-y_t}{y_t} \approx \ln\frac{y_{t+1}}{y_t} = \ln y_{t+1} - \ln y_t = \alpha(\ln k_{t+1} - \ln k_t) = \alpha \ln\frac{k_{t+1}}{k_t} = \alpha\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = \alpha\left(\frac{k_{t+1}}{k_t} - 1\right)$，故增速同样随$k_t$的增加而下降

图示：Solow模型人均资本收敛



图示：Solow模型转移路径增速



Solow模型：黄金法则

- Solow模型中，人均消费$c_t=(1-s)f(k_t)$，稳态时有$c^*=(1-s)f(k^*)$
  - 注意到k^*也是s的函数，故s的大小，会影响稳态消费c^*
- 能够最大化稳态消费的s，称为储蓄率的黄金法则(golden rule)
- 对$c^*=(1-s)f(k^*)$求关于s的一阶导，并令其等于0，可得

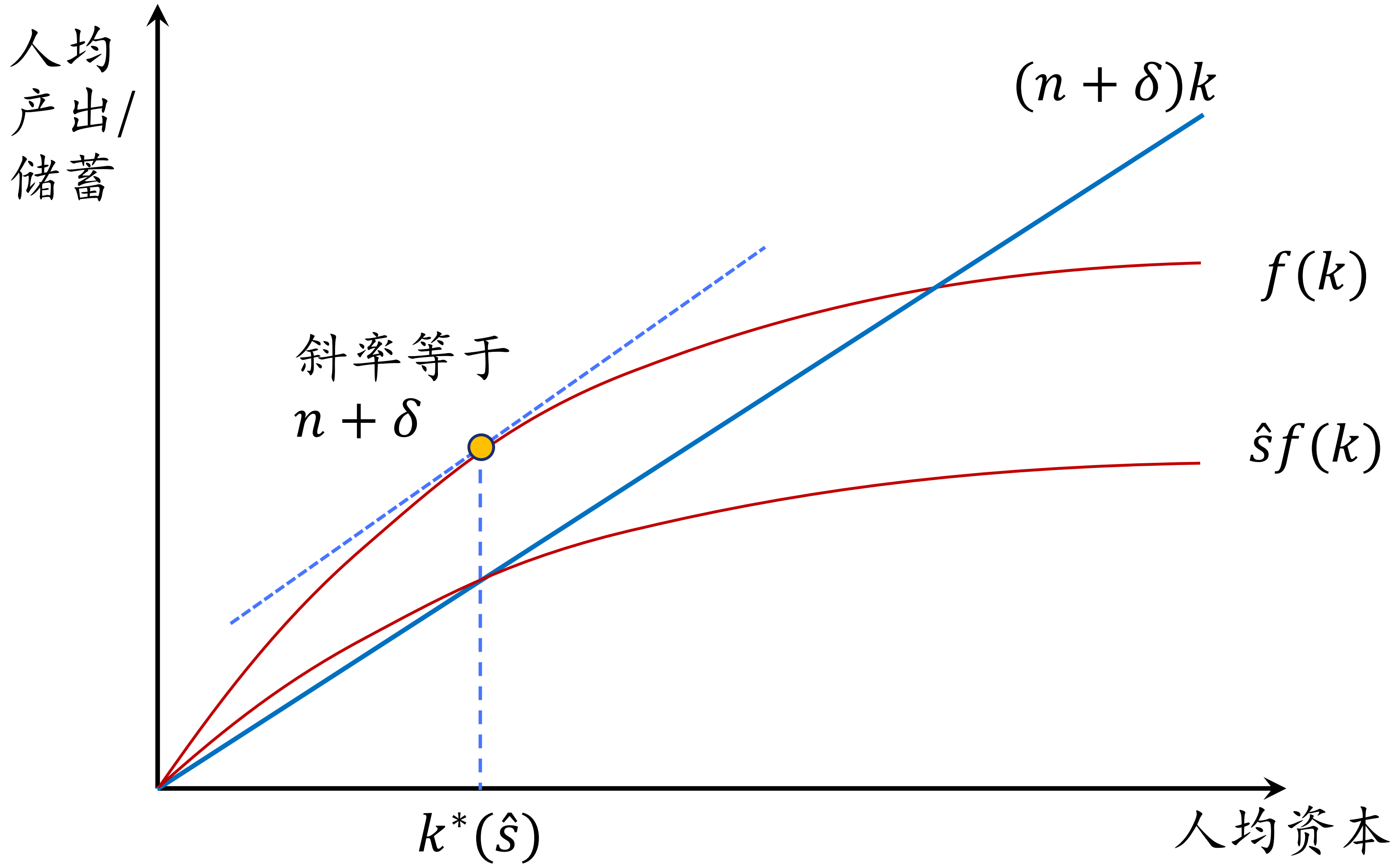
$$\frac{\mathrm{d}c^*}{\mathrm{d}s}=-f(k^*)+(1-s)f'(k^*)\frac{\mathrm{d}k^*}{\mathrm{d}s}=0$$

- 稳态k^*满足方程$(n+\delta)k^*=sf(k^*)$，两端对s求导可得

$$(n+\delta)\frac{\mathrm{d}k^*}{\mathrm{d}s}=f(k^*)+sf'(k^*)\frac{\mathrm{d}k^*}{\mathrm{d}s}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}k^*}{\mathrm{d}s}=\frac{f(k^*)}{n+\delta-sf'(k^*)}$$

- 代入黄金法则一阶条件得：$f'(k^*)=n+\delta$，即黄金法则下的$\hat{s}$应使得k^*处生产函数的导数等于$n+\delta$

图示：黄金法则



黄金法则：CD生产函数特例

- CD生产函数下，$f'(k^*) = \alpha k^{*(\alpha-1)}$，黄金法则$\hat{s}$所满足的条件为

$$\alpha k^{*(\alpha-1)} = n + \delta \Rightarrow \alpha\left(\frac{\hat{s}}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha}} = \alpha\frac{n+\delta}{\hat{s}} = n + \delta \Rightarrow \hat{s} = \alpha$$

Solow模型：引入生产率

- 包含TFP的加总生产函数：$AF(K,L)$，其中A为全要素生产率（水平）
- 相应的人均生产函数：$Af(k)$
- 首先假设A为常数，则稳态人均资本条件为$(n+\delta)k^* = sAf(k^*)$
  - CD生产函数下：$k^* = \left(\frac{sA}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$
- 相应的资本积累动态函数为$G(k_t) \equiv \frac{(1-\delta)k_t+sAf(k_t)}{1+n}$
- 所有分析保持一致
- 三种生产率：TFP，资本偏向型生产率$F(AK,L)$，劳动偏向型生产率$F(K,AL)$
  - 在CD生产函数下，可以相互转换，但在一般的一次齐次生产函数下不等价

Solow模型：劳动偏向型(labor augmenting)技术进步

- 现在假设劳动偏向型生产率A_t具有一个常数增长率$A_t = A_0(1+\gamma)^t$
  - 生产函数为$Y_t = F(K_t, A_t L_t)$
- 此时模型中人均资本$k_t = K_t/L_t$存量也会出现持续增长
- 为了分析模型动态性质，首先确定此时的模型稳态，为此，考虑一个新的去除增长趋势的人均资本量$\tilde{k}_t = K_t/(A_t L_t)$，以及去除增长趋势的人均产出$\tilde{y}_t = Y_t/(A_t L_t) = F(K_t, A_t L_t)/(A_t L_t) = F(K_t/(A_t L_t), 1) = f(\tilde{k}_t)$
- 此时的资本积累方程变为：

$$\tilde{k}_{t+1}(1+n)(1+\gamma) = \frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}} \frac{A_{t+1}}{A_t} \frac{L_{t+1}}{L_t} = (1-\delta)\frac{K_t}{A_t L_t} + s\frac{F(K_t, A_t L_t)}{A_t L_t}$$

$$= (1-\delta)\tilde{k}_t + sf\left(\tilde{k}_t\right)$$

劳动偏向型(labor augmenting)技术进步：稳态

- 此时Solow模型的稳态人均资本$\tilde{k}^*$满足$(n+\gamma+\delta)\tilde{k}^* = sf\left(\tilde{k}^*\right)$
- CD生产函数下，可解得$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{n+\gamma+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$
- 注意人均资本$k = \frac{K}{L} = A\frac{K}{AL} = A\tilde{k}$，故若初始资本满足$k_0 = A_0\tilde{k}_0 = A_0\tilde{k}^*$，则存在稳态增长$k_t = A_t\tilde{k}^* = A_0(1+\gamma)^t\tilde{k}^*$
- 相应的人均产出$y_t = \frac{Y_t}{L_t} = A_t\frac{Y_t}{A_tL_t} = A_t\tilde{y}_t = A_tf\left(\tilde{k}_t\right) = A_tf\left(\tilde{k}^*\right)$，也具有稳态增长率$\gamma$

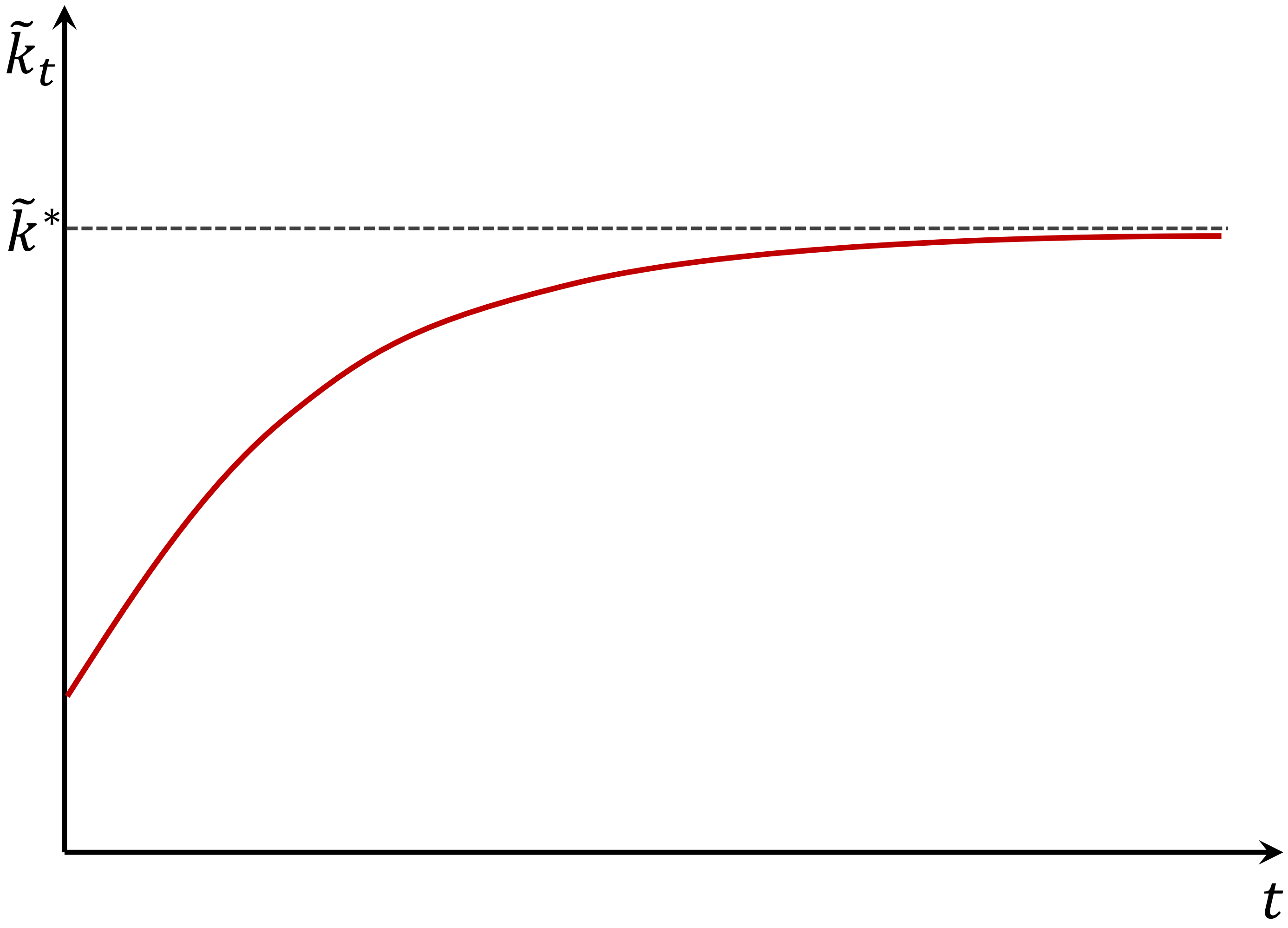
劳动偏向型技术进步：$\tilde{k}_t$转移路径

- 此时资本动态方程为：

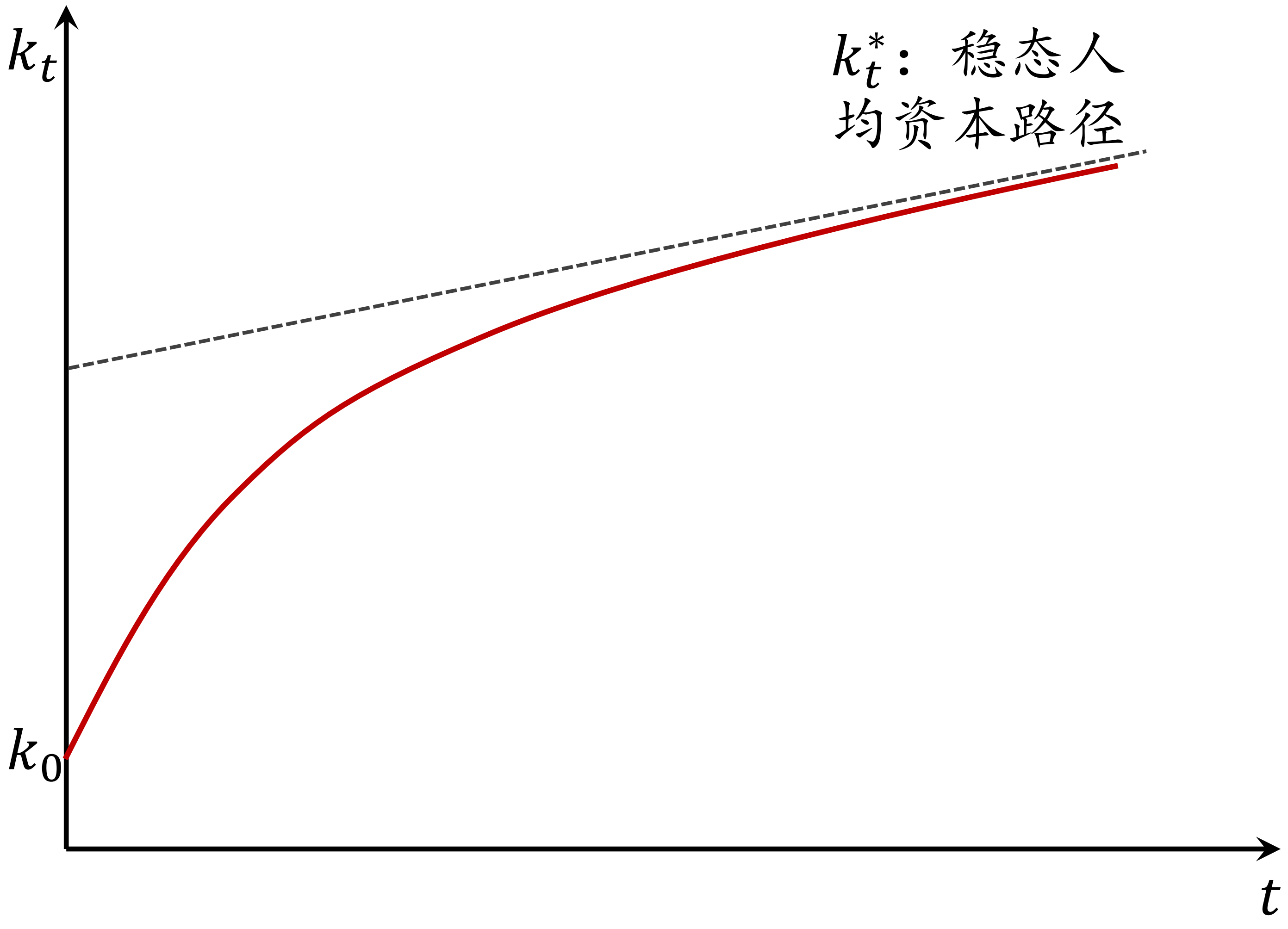
$$\tilde{k}_{t+1} = G(\tilde{k}_t)$$

$$\equiv \frac{(1-\delta)\tilde{k}_t + sf(\tilde{k}_t)}{(1+n)(1+\gamma)}$$

- 资本动态与之前类似：若$\tilde{k}_0 < \tilde{k}^*$，则$\tilde{k}_t$单调递增收敛到$\tilde{k}^*$，且$\tilde{k}_t$增长率逐渐降低



劳动偏向型技术进步：人均资本k_t转移路径

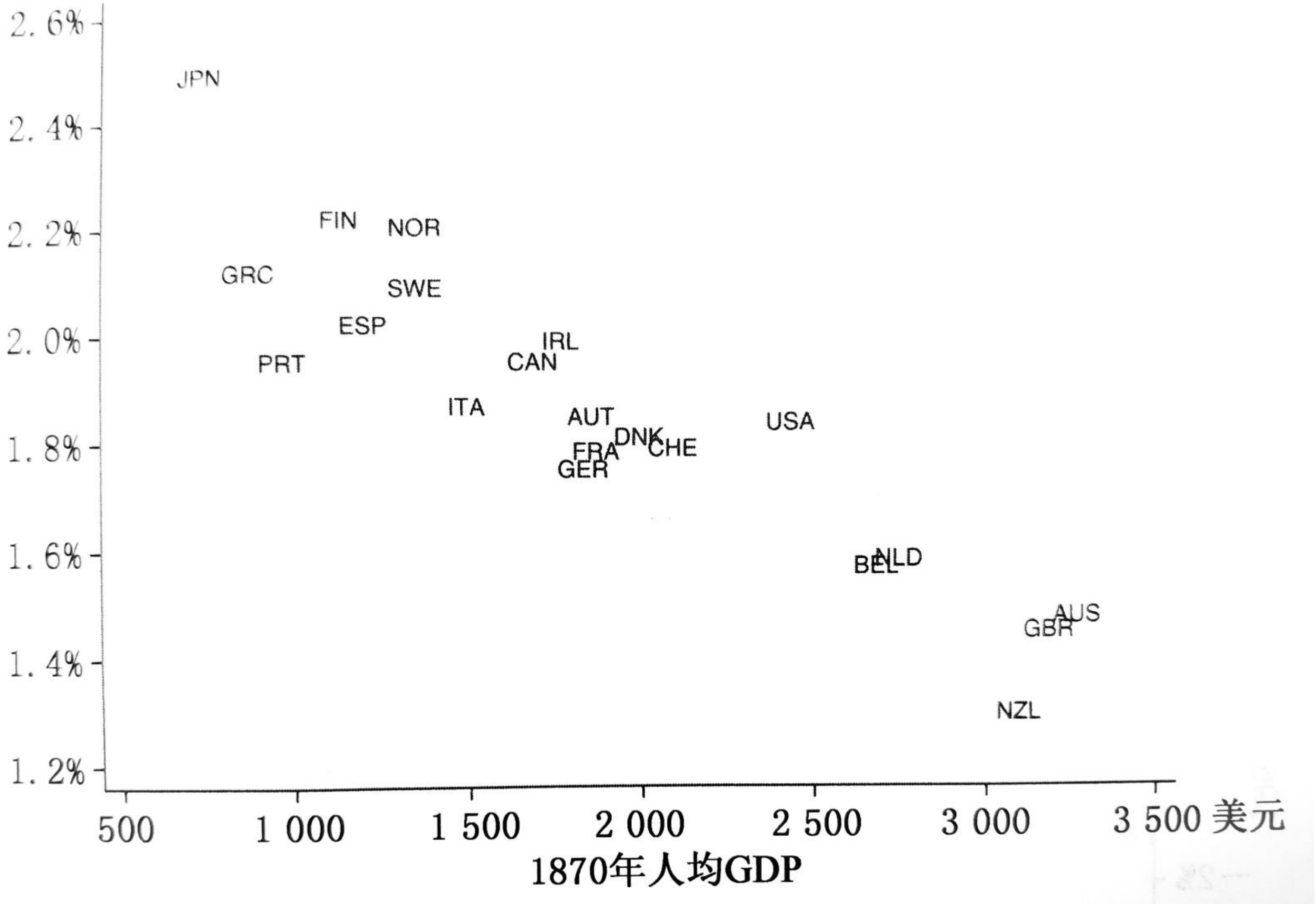


Solow模 型： 增 长 收 敛

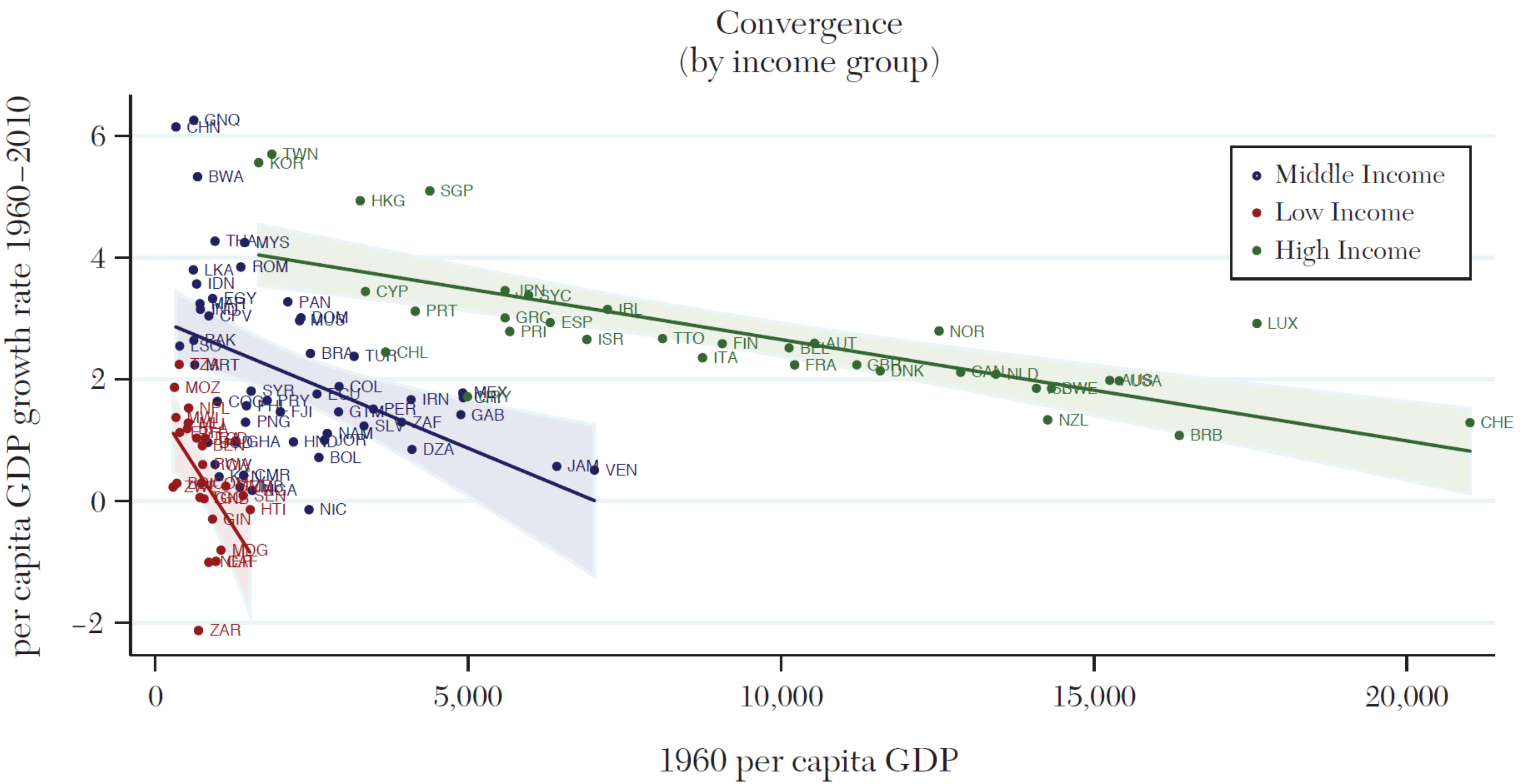
Solow模型：可验证的理论推断(testable theoretical prediction)

- 无论是不带技术进步的基本Solow模型，还是带技术进步的Solow模型，都有下属基本的理论推断：
  ① 从较低的初始人均资本开始，人均产出增长率随人均资本的增加而下降
  ② 由于人均产出水平值是人均资本的增函数，故人均产出增长率同样随人均产出水平值的上升而下降
- 上述结果称为增长收敛(growth convergence)
  - 在多个国家的横截面与一个国家的时间序列上都成立
  - 由于资本不是直接可观测的变量（需要人工推算），而人均产出是更容易获得的数据，故通常对上述推断②进行实证检验
- 在跨国层面，无条件收敛并不成立，但条件收敛是一个常见规律
  - 条件收敛：控制住一系列“其他”因素

发达经济体长期增长收敛：1870 – 2008平均增速 Data: Madison (2010)



经济增长收敛：全球样本 Data: PWT 7.1



❖ Johnson and Papageorgiou (2020, JEL): 条件收敛（高中低收入国家）

中国经验：时间序列

- 分阶段特征：人均GDP较低时，两者呈正相关人均GDP较高时，两者呈负相关