经济增长理论

第十讲：新古典增长模型

授课人：刘 岩

2024年5月7日

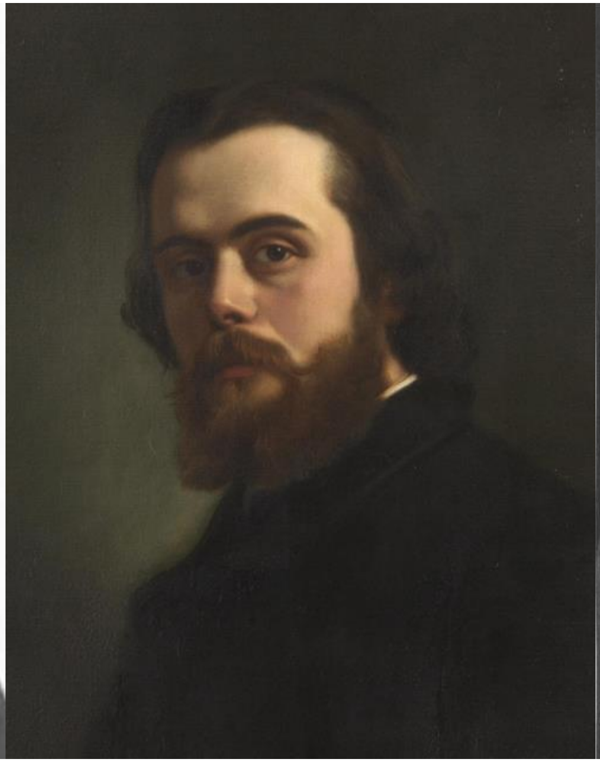
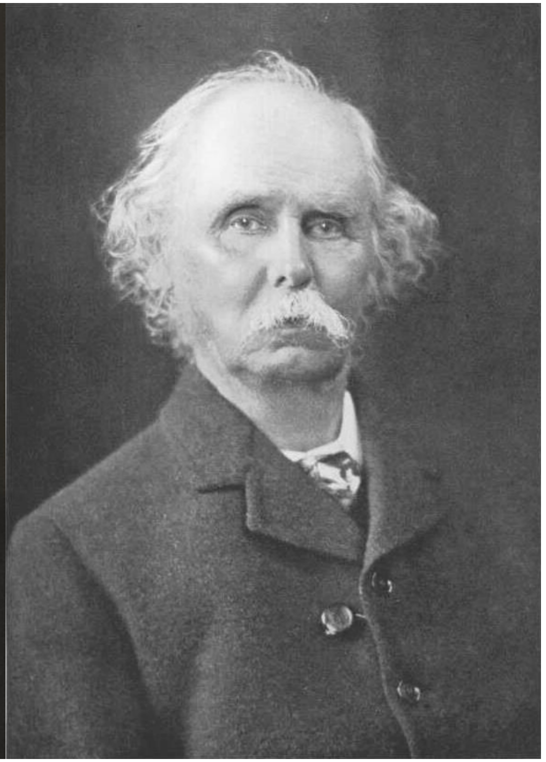
新古典增长模型：理论

新古典经济学

- 新古典经济学(neoclassical economics)：19世纪末20世纪初，欧洲出现经济学的边际主义革命(marginalism revolution)，标志着由古典经济学(classical economics)向新古典经济学的转型
  - 边际主义革命：Jevons (1835 – 1882), Menger (1840 – 1921), Walras (1834 – 1910)等在1870 – 1874年的一系列著作，在传统经济分析中引入边际效用、边际产出等概念，即将个体经济行为理解为个体效用或利润最大化行为，并通过<u>市场均衡</u>将个体行为相关联
    - ✓ 效用最大化⇒边际效用等于商品价格，利润最大化⇒边际产出等于商品价格
    - ✓ 集中呈现在Marshall (1842 – 1924)于1890年首版的*Principles of Economics*中
- 新古典经济增长理论：在新古典经济学理论范式中发展出的经济增长理论体系，特点是建立在微观基础（个体决策）上的一般均衡分析框架

Jevons (UK), Menger (Austrian), Walras (France), Marshall (UK)

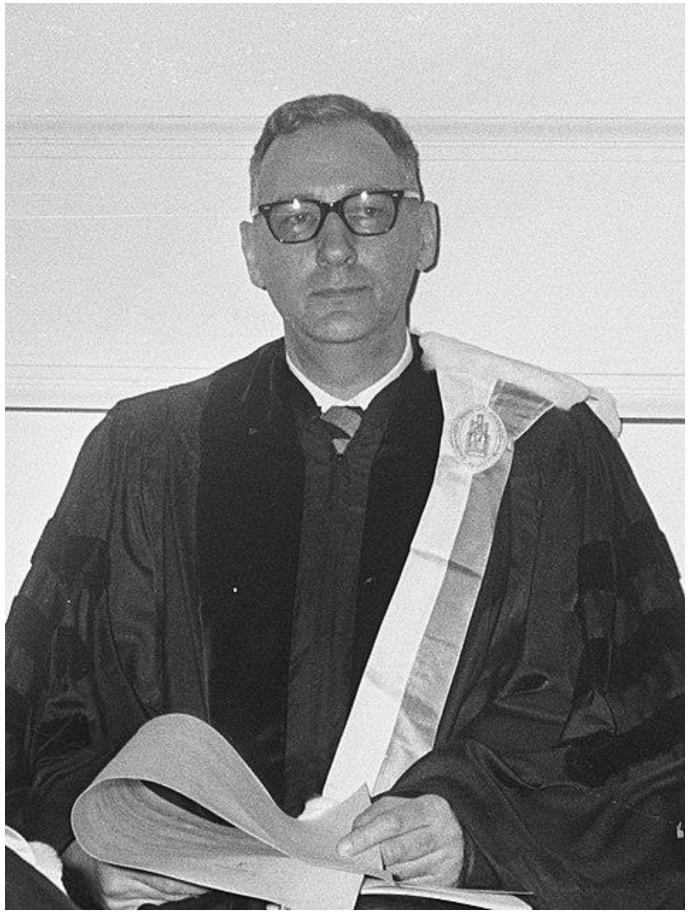


新古典增长模型的核心框架：Ramsey-Cass-Koopmans模型

Ramsey (1903 – 1930)

Cass (1937 – 2008)



Cass (1910 – 1985)

新古典增长模型：简化的例子

- 一个商品，一个代表性家庭，一个代表性企业，两个时期，竞争性市场
- 家庭在第1期有初始商品禀赋（希腊字母）$\omega > 0$，在第2期有劳动力禀赋$\bar{L}$
- 家庭的效用函数为$u(c_1) + \beta u(c_2)$，$\beta \in (0,1)$为折现率，$u(\cdot)$连续可微
  - 劳动没有效用损失（负效用）
  - 第1期的预算约束：$c_1 + a \leq \omega$，其中a为储蓄，转换为第2期资本$a = K$
  - 第2期的预算约束：$c_2 \leq ra + w\bar{L}$，其中r为资本回报率，w为工资率
- 企业生产函数：$Y = F(K, L)$，连续可微，满足一次齐次性
  - 企业利润函数：$F(K, L) - rK - wL$
  - 竞争性市场下利润最大化：$F_K(K, L) = r$，$F_L(K, L) = w$
  - 一次齐次性：$rK + wL = F_K(K, L)K + F_L(K, L)L = F(K, L)$，最优选择下利润为0

简化的例子：竞争性均衡

- 竞争性均衡：配置$(c_1^*, c_2^*, a^*, K^*, L^*)$及价格$(r^*, w^*)$满足如下均衡条件：
  - 家庭效用最大化：给定价格(r^*, w^*)，(c_1^*, c_2^*, a^*)满足家庭效用最大化条件
  $$\max_{c_1,c_2,a} u(c_1) + \beta u(c_2) \quad \text{subject to } c_1 + a \leq \omega, c_2 \leq ra + w\bar{L}$$
  - 企业利润最大化：给定价格(r^*, w^*)，(K^*, L^*)满足企业利润最大化条件
  $$\max_{K,L} F(K, L) - rK - wL$$
  - 市场出清：储蓄供给等于资本需求$a^* = K^*$，劳动供给等于需求$\bar{L} = L^*$
- 对效用函数与生产函数增加恰当的边界条件，即可保证均衡为内点解
  - 内点解：$c_1^*, c_2^*, a^* = K^*, L^* > 0$且有限
  - 边界条件（又称为Inada条件）：
  $$\lim_{c\to 0} u'(c) = +\infty, \lim_{c\to +\infty} u'(c) = 0,$$
  $$\lim_{K\to 0} F_K(K, L) = +\infty, \lim_{K\to +\infty} F_K(K, L) = 0, \lim_{L\to 0} F_L(K, L) = +\infty, \lim_{L\to +\infty} F_L(K, L) = 0$$

竞争性均衡与最优资本选择的等价性

- 给定效用函数严格单调递增，两期的预算约束均为紧(binding)约束，再利用市场出清条件，可得$c_1 = \omega - K, c_2 = rK + w\bar{L}$
- 再由一次齐次生产函数下企业利润最大化条件得$rK + w\bar{L} = F(K, \bar{L})$
- 竞争均衡的求解归结为求解家庭部门最优资本积累

$$\max_K u(\omega - K) + \beta u\big(F(K, \bar{L})\big)$$

- 上述（无约束）最优化问题的一阶最优条件如下

$$u'(\omega - K) = \beta u'\big(F(K, \bar{L})\big) F_K(K, \bar{L})$$

- 假设$u(c) = \ln c, \bar{L} = 1, F(K, \bar{L}) = K^\alpha$，则上述一阶最优条件为

$$\frac{1}{\omega - K} = \beta \frac{\alpha K^{\alpha-1}}{K^\alpha} = \frac{\alpha\beta}{K} \Rightarrow K^* = \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}\omega \Rightarrow \text{储蓄率} s = \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}$$

RCK模型：无穷期

- 离散时间：$t = 0,1,2, \dots, \infty$
- 初始人口（劳动力）$\bar{L}_0 = 1$，人口增长率为常数$n > 0$：$\bar{L}_t = (1+n)^t$
- 代表性家庭折现效用函数：$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (1+n)^t u(c_t)$
  - 代表性家庭人均消费c_t，总消费$C_t = \bar{L}_t c_t = (1+n)^t c_t$
  - 代表性家庭t期单位成员效用$u(c_t)$，总效用$\bar{L}_t u(c_t) = (1+n)^t u(c_t)$
- 代表性企业生产函数：$F(K_t, \Gamma_t L_t)$，Γ_t为劳动扩充生产率，增速为常数$\gamma > 0$，$\Gamma_t = (1+\gamma)^t \Gamma_0$，$\Gamma_0 > 0$为给定的初始生产率，$K_0$为给定的初始总资本
  - 同样可以定义单位有效劳动资本$\tilde{k}_t = K_t/(\Gamma_t L_t)$，即人均资本$k_t/\Gamma_t$，则单位有效劳动产出$\tilde{y}_t = Y_t/(\Gamma_t L_t) = F\left(\tilde{k}_t, 1\right) \equiv f\left(\tilde{k}_t\right)$

家庭跨期决策

- 家庭的跨期决策是最大化折现效用$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t(1+n)^t u(c_t)$
- 每期的预算约束（加总形式）为$C_t + A_{t+1} \le (1+r_t)A_t + w_t\bar{L}_t$，改写为人均形式：

$$\frac{C_t}{\bar{L}_t} + \frac{A_{t+1}}{\bar{L}_{t+1}}\frac{\bar{L}_{t+1}}{\bar{L}_t} \le (1+r_t)\frac{A_t}{\bar{L}_t} + w_t\frac{\bar{L}_t}{\bar{L}_t} \Leftrightarrow c_t + a_{t+1}(1+n) \le (1+r_t)a_t + w_t$$

- 进一步将选择变量改写为单位有效劳动形式，即$c_t = \Gamma_t\tilde{c}_t, a_t = \Gamma_t\tilde{a}_t$，$w_t = \Gamma_t\widetilde{w}_t$，效用最大化问题为：

$$\max_{\{\tilde{c}_t,\tilde{a}_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t(1+n)^t u(\Gamma_t\tilde{c}_t)$$

$$\text{s.t. } \tilde{c}_t + \tilde{a}_{t+1}(1+n)(1+\gamma) \le (1+r_t)\tilde{a}_t + \widetilde{w}_t, \forall t = 0,1,\dots,\infty, \tilde{a}_0\text{给定}$$

  - 由市场出清条件，$A_0 = K_0 \Leftrightarrow \tilde{a}_0 = \tilde{k}_0$

家庭跨期决策的一阶最优条件

- 使用Lagrange乘子法推导家庭跨期决策的一阶最优条件
- 令$\beta^t(1+n)^t\lambda_t$为t期预算约束的Lagrange乘子，则Lagrange函数为：

$$\mathcal{L} \equiv \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t(1+n)^t[u(\Gamma_t\tilde{c}_t) - \lambda_t(\tilde{c}_t + \tilde{a}_{t+1}(1+n)(1+\gamma) - (1+r_t)\tilde{a}_t - \widetilde{w}_t)]$$

- 一阶最优条件分两组，一组关于$\{\tilde{c}_t\}$，另一组关于$\{\tilde{a}_{t+1}\}$：$\forall t \geq 0$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{c}_t} = 0 \Rightarrow \Gamma_t u'(\Gamma_t\tilde{c}_t) = \lambda_t$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{a}_{t+1}} = 0 \Rightarrow (1+n)(1+\gamma)\lambda_t = \beta(1+n)(1+r_{t+1})\lambda_{t+1}$$

  - 注意，恰当的边界条件（Inada条件）保证只存在内点解，可以忽略所有非负约束
  - 无穷期最优化问题一阶最优条件还包括横截(transversality)条件，此处忽略

CRRA效用函数与家庭跨期决策Euler方程

- 为简化理论分析，以下仅考虑CRRA (constant relative risk-aversion)效用函数

$$u(c)=\begin{cases}\dfrac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}, & \sigma>0\text{且}\sigma\neq 1\\ \ln c, & \sigma=1\end{cases}$$

  - $u(c)$连续可微，$u'(c)=c^{-\sigma}>0$，$u''(c)=-\sigma c^{-\sigma-1}<0$，严格单调递增，严格凹

- 前一页两组一阶条件可归并为

$$(1+\gamma)\Gamma_t u'(\Gamma_t\tilde{c}_t)=\beta(1+\ r_{t+1})\Gamma_{t+1}u'(\Gamma_{t+1}\tilde{c}_{t+1})$$
$$\Rightarrow u'(\Gamma_t\tilde{c}_t)=\beta(1+r_{t+1})u'(\Gamma_{t+1}\tilde{c}_{t+1})$$

- 由CRRA效用，$u'(\Gamma_t\tilde{c}_t)=(\Gamma_t\tilde{c}_t)^{-\sigma}=\Gamma_t^{-\sigma}\tilde{c}_t^{-\sigma}$，故家庭Euler方程为：

$$\tilde{c}_t^{-\sigma}=\beta(1+\gamma)^{-\sigma}(1+r_{t+1})\tilde{c}_{t+1}^{-\sigma}$$

企业最优决策

- 企业租用资本与劳动，成本为资本回报及折旧，与工资，利润为

$$F(K_t, L_t) - (r_t + \delta)K_t - w_t L_t$$

- 改写为单位有效劳动形式

$$\left[f\left(\tilde{k}_t\right) - (r_t + \delta)\tilde{k}_t - \tilde{w}_t\right]\Gamma_t L_t \equiv \pi\left(\tilde{k}_t\right)\Gamma_t L_t$$

- 最大化利润，关于$\tilde{k}_t$的一阶条件为$f'\left(\tilde{k}_t\right) = r_t + \delta$，即资本边际产出等于成本；关于$L_t$的一阶条件为

$$L_t = \begin{cases} 0, & \pi\left(\tilde{k}_t\right) < 0 \\ [0, \infty), & \pi\left(\tilde{k}_t\right) = 0 \\ \infty, & \pi\left(\tilde{k}_t\right) > 0 \end{cases}$$

- 与固定劳动供给$\bar{L}_t$相匹配，能够实现劳动力市场出清的条件为$\pi\left(\tilde{k}_t\right) = 0$

市场出清条件

- 资本出清$\tilde{a}_t=\tilde{k}_t$，劳动出清$L_t=\bar{L}_t \Rightarrow f\left(\tilde{k}_t\right)-(r_t+\delta)\tilde{k}_t-\tilde{w}_t=0$
- 家庭预算约束取等式

$$\tilde{c}_t+\tilde{a}_{t+1}(1+n)(1+\gamma)=(1+r_t)\tilde{a}_t+\tilde{w}_t$$

$$\Rightarrow\ (1+n)(1+\gamma)\tilde{k}_{t+1}$$

$$=\left(1+f'\left(\tilde{k}_t\right)-\delta\right)\tilde{k}_t+f\left(\tilde{k}_t\right)-\left(f'\left(\tilde{k}_t\right)-\delta+\delta\right)\tilde{k}_t-\tilde{c}_t$$

$$=(1-\delta)\tilde{k}_t+f\left(\tilde{k}_t\right)-\tilde{c}_t$$

$$\Rightarrow \tilde{k}_{t+1}=\left[(1-\delta)\tilde{k}_t+f\left(\tilde{k}_t\right)-\tilde{c}_t\right]/[(1+n)(1+\gamma)]\ldots(1)$$

- 家庭Euler方程可改写为

$$\tilde{c}_t=\left[\frac{\beta\left(1-\delta+f'\left(\tilde{k}_{t+1}\right)\right)}{(1+\gamma)^{\sigma}}\right]^{-1/\sigma}\tilde{c}_{t+1}\ldots(2)$$

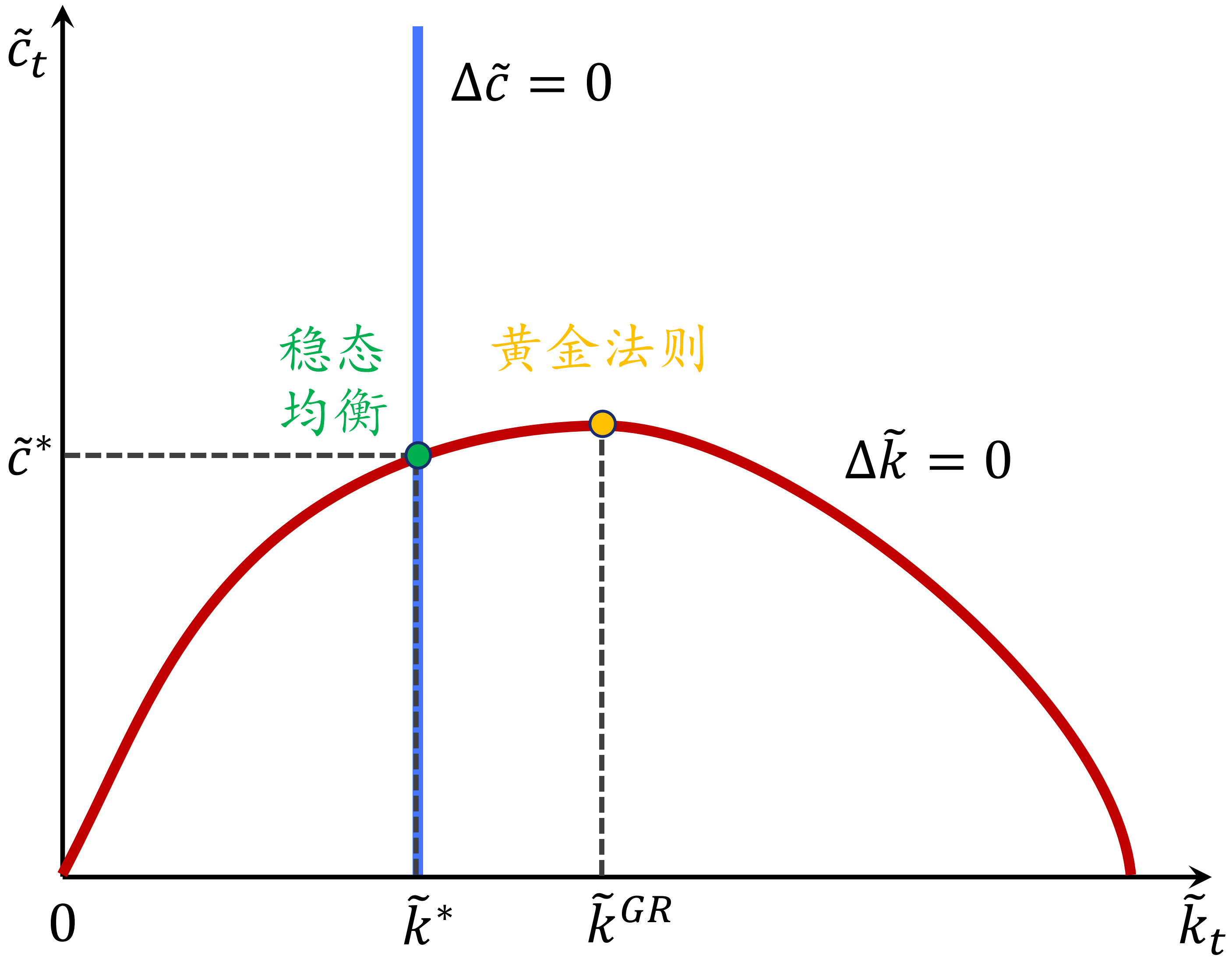
稳态均衡

- 模型的稳态均衡满足两个条件：$\tilde{k}_{t+1}=\tilde{k}_t=\tilde{k}^*$，$\tilde{c}_{t+1}=\tilde{c}_t=\tilde{c}^*$
- 前者记为$\Delta\tilde{k}=0$：$(1)\Rightarrow \tilde{c}_t=f\left(\tilde{k}_t\right)-[(1+n)(1+\gamma)-(1-\delta)]\tilde{k}_t$
- 后者记为$\Delta\tilde{c}=0$：$(2)\Rightarrow \frac{\beta\left(1-\delta+f'\left(\tilde{k}_t\right)\right)}{(1+\gamma)^{\sigma}}=1$
- 稳态均衡：由第二个条件可解得$\tilde{k}^*$，由第一个条件解得$\tilde{c}^*$
- 平衡增长路径(balanced growth path, BGP)：单位有效劳动下，稳态资本、消费不变，人均资本与消费与劳动扩充生产率一样，稳定增长

$$k_t=\Gamma_t\tilde{k}_t=\Gamma_0(1+\gamma)^t\tilde{k}^*,\qquad c_t=\Gamma_t\tilde{c}_t=\Gamma_0(1+\gamma)^t\tilde{c}^*$$

- 稳态储蓄率：$s^*=\frac{f\left(\tilde{k}^*\right)-\tilde{c}^*}{f\left(\tilde{k}^*\right)}=\frac{[(1+n)(1+\gamma)-(1-\delta)]\tilde{k}^*}{f\left(\tilde{k}^*\right)}$

稳态均衡图示：$\tilde{k}_t$-$\tilde{c}_t$坐标



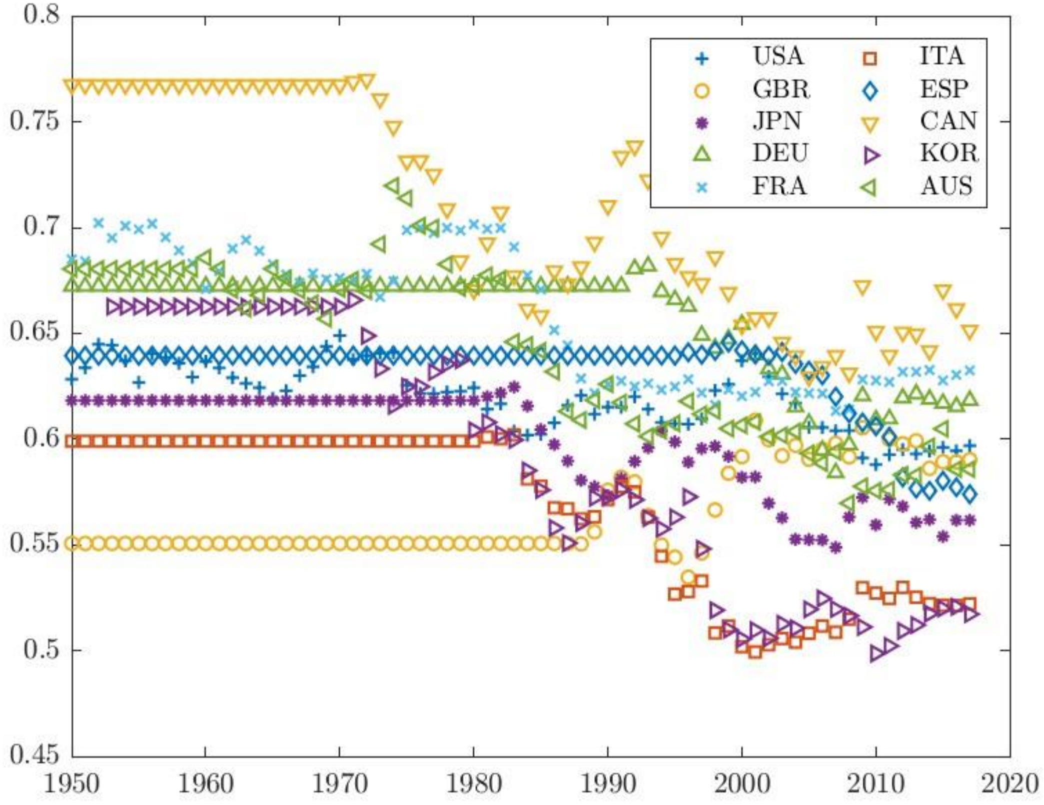
新古典增长模型：Kaldor事实

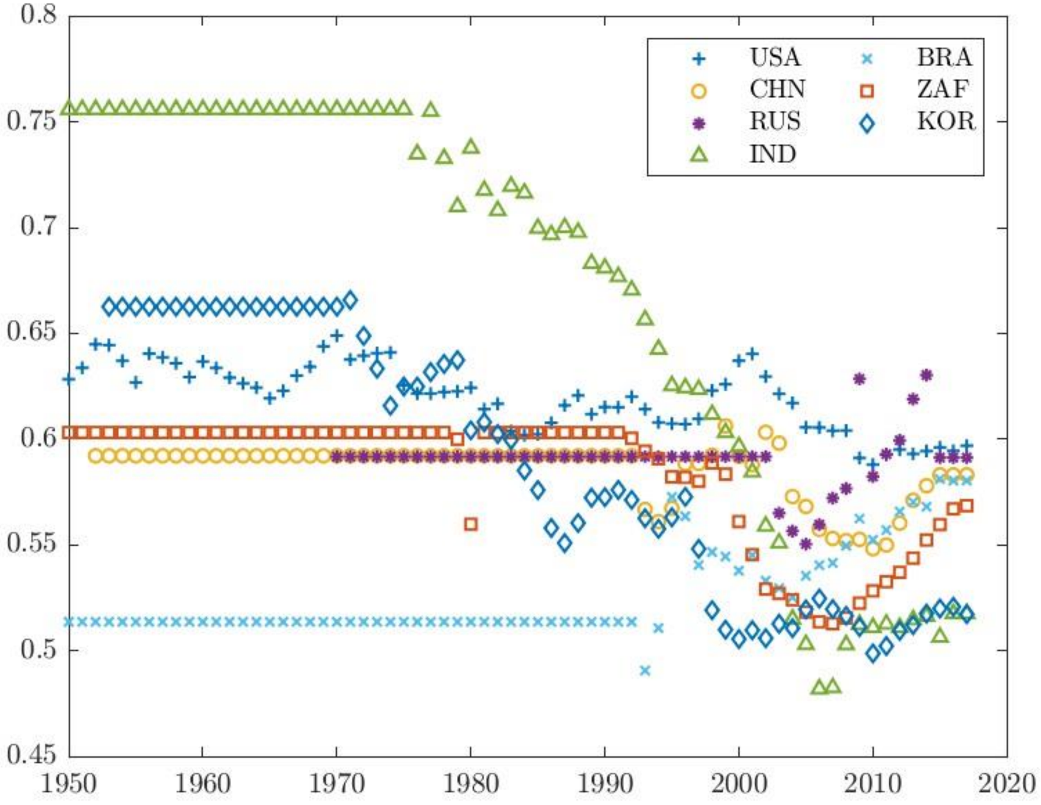
Kaldor (1908 – 1986)事实：经济体长期收敛到平衡增长路径

- 国民经济中，劳动收入份额保持稳定
- 人均资本增长率保持稳定
- 人均产出增长率保持稳定
- 资本产出比保持稳定
- 消费/投资产出比保持稳定
- 资本回报率保持稳定

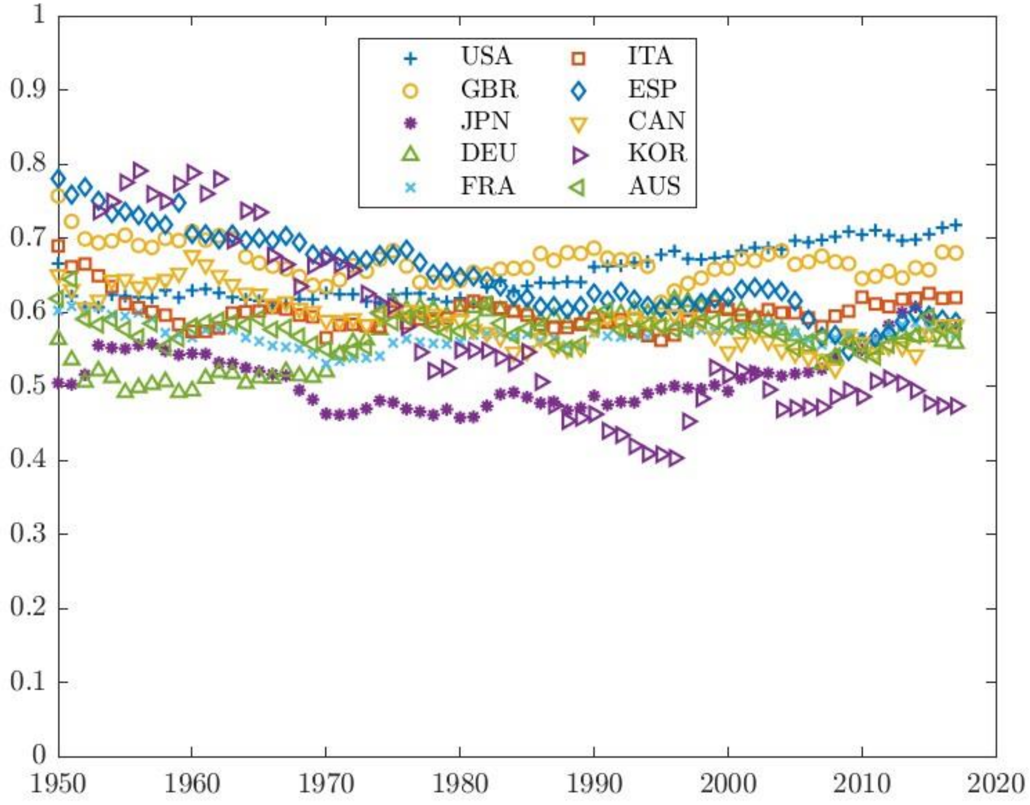
- 美国20世纪至今，整体呈现上述5个典型事实，且该事实与新古典增长模型（RCK）平衡增长路径的性质一致
- 但从全球跨国比较来看，上述特征并非普世成立

劳动收入份额 Source: PWT，下同

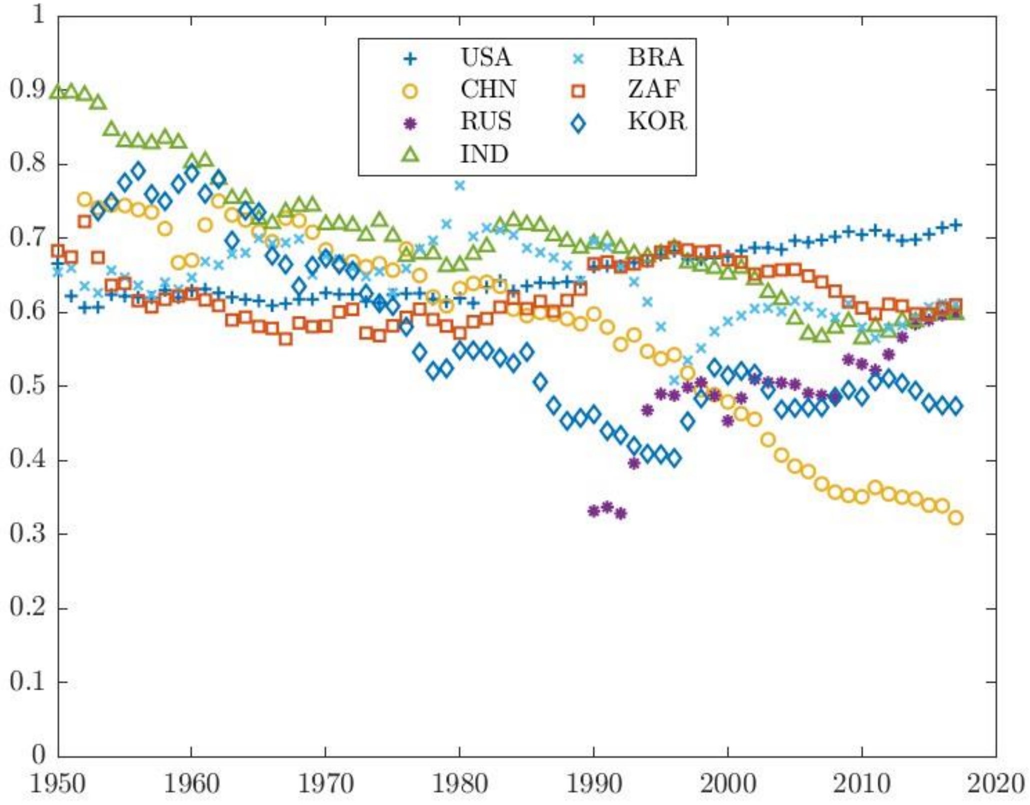




消费产出比

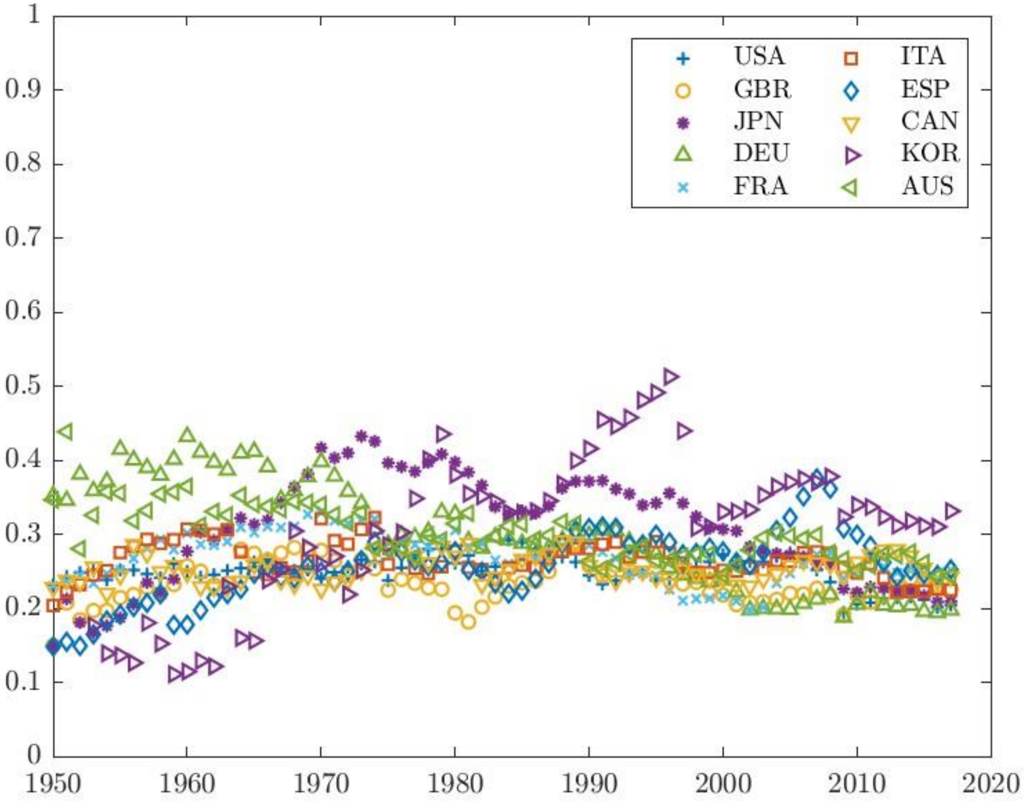


USA
GBR
JPN
DEU
FRA
ITA
ESP
CAN
KOR
AUS
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
1950
1960
1970
1980
1990
2000
2010
2020

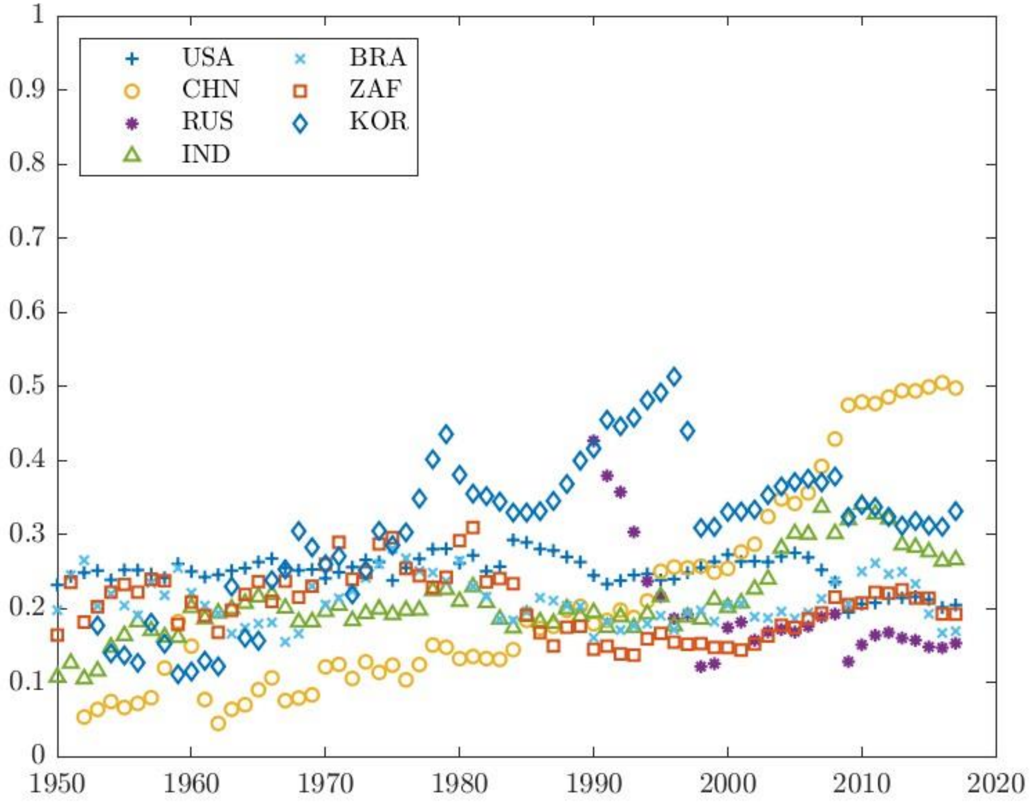


USA
CHN
RUS
IND
BRA
ZAF
KOR
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
1950
1960
1970
1980
1990
2000
2010
2020

投资产出比

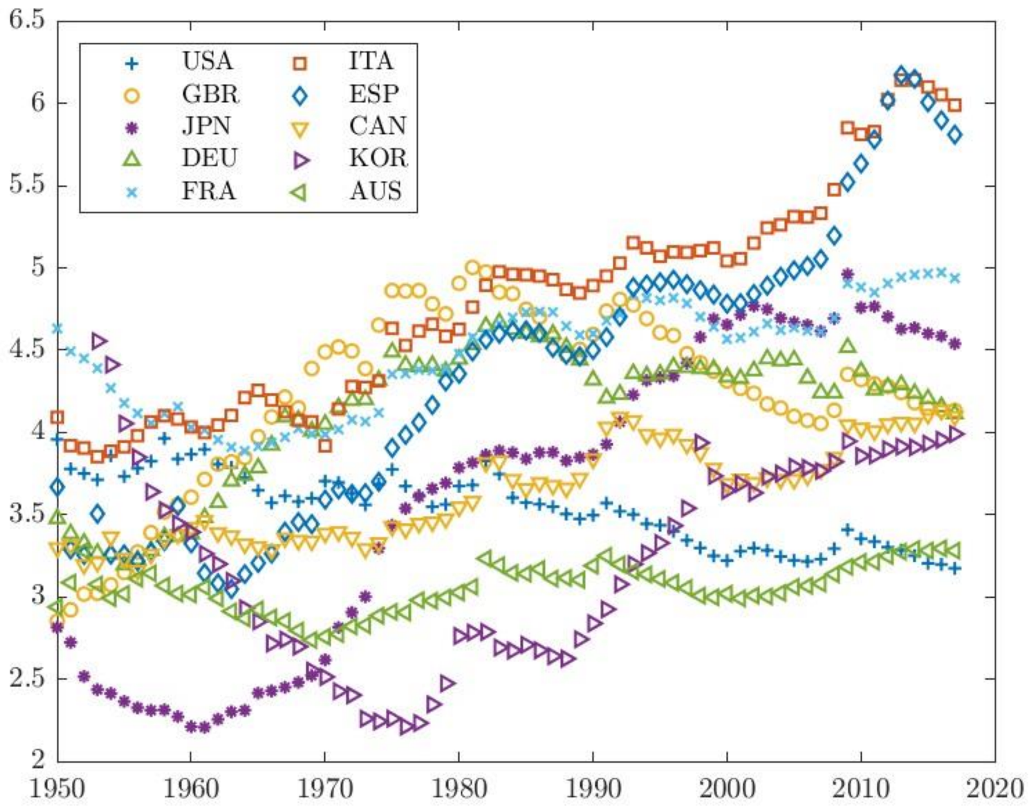


USA
GBR
JPN
DEU
FRA
ITA
ESP
CAN
KOR
AUS
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1950
1960
1970
1980
1990
2000
2010
2020

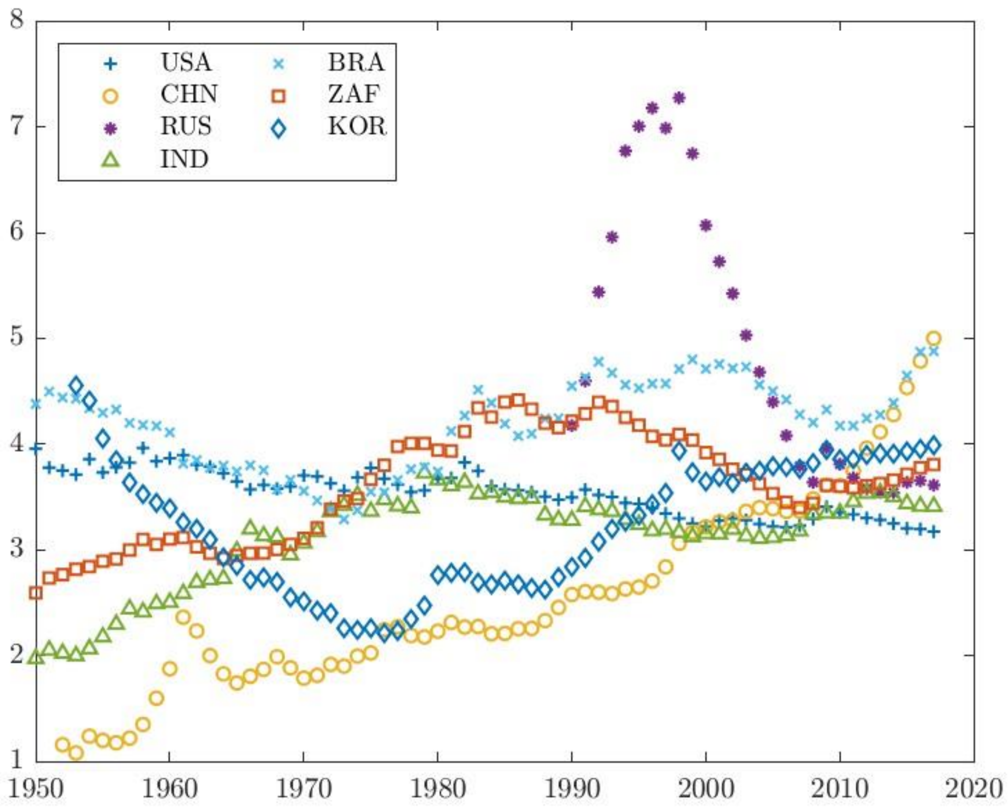


USA
CHN
RUS
IND
BRA
ZAF
KOR
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1950
1960
1970
1980
1990
2000
2010
2020

资本产出比

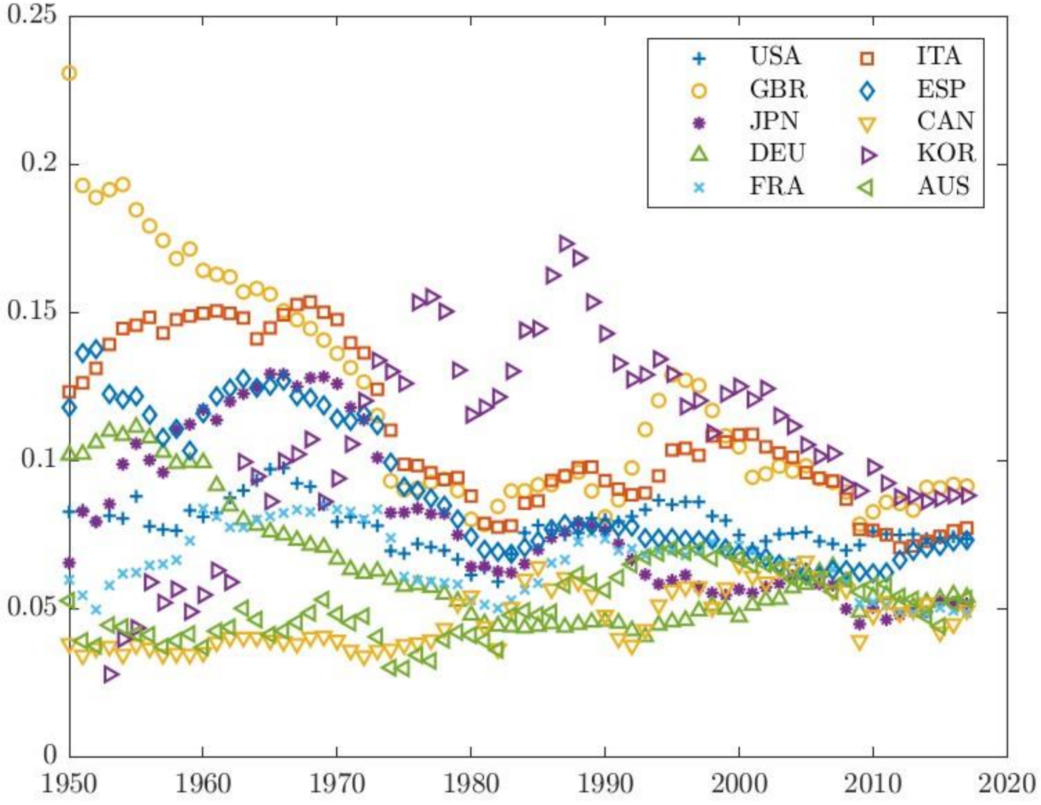


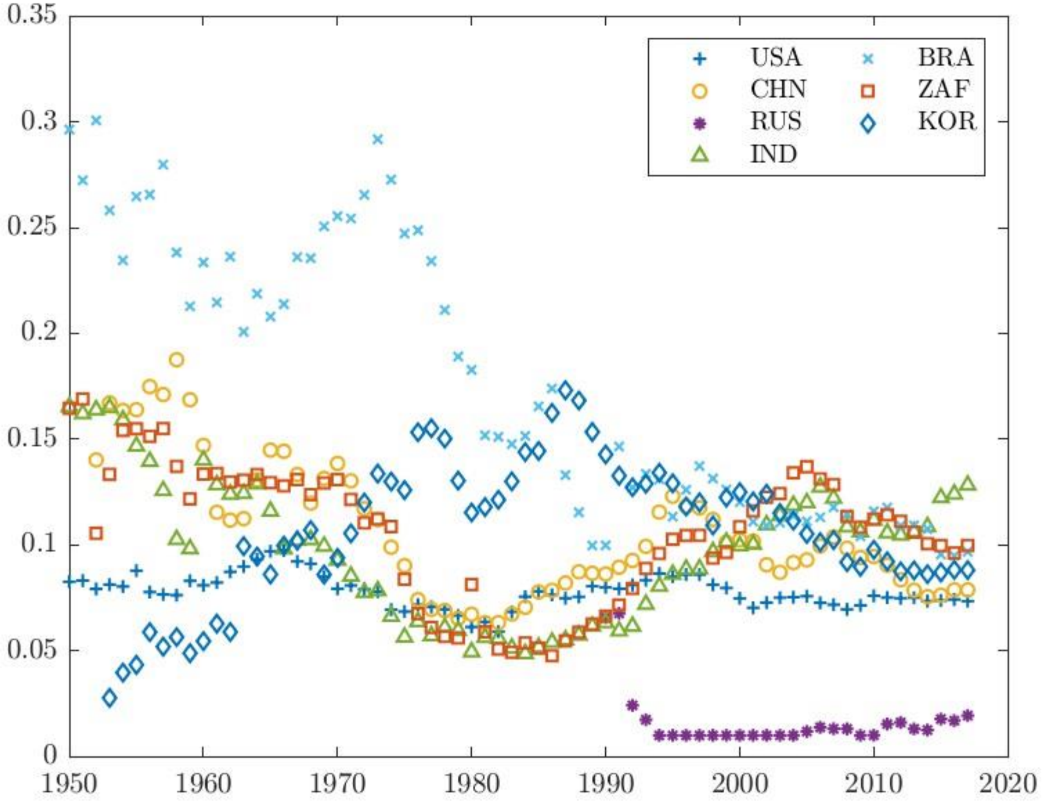
6.5
6
5.5
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1950
1960
1970
1980
1990
2000
2010
2020
USA
GBR
JPN
DEU
FRA
ITA
ESP
CAN
KOR
AUS



8
7
6
5
4
3
2
1
1950
1960
1970
1980
1990
2000
2010
2020
USA
CHN
RUS
IND
BRA
ZAF
KOR

资本回报率


USA
GBR
JPN
DEU
FRA
ITA
ESP
CAN
KOR
AUS
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
1950
1960
1970
1980
1990
2000
2010
2020


USA
CHN
RUS
IND
BRA
ZAF
KOR
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
1950
1960
1970
1980
1990
2000
2010
2020