武汉大学本科金融工程专业 2023 春公司金融

第 1 次作业参考答案

1. 按揭贷款现金流

a.

在等额本息还款的情况下，设第t期时剩余的本金为A_t $(0 < t < T)$，则由题意可知A_t满足如下形式的递推式：

$$A_{t+1} = A_t(1+i) - C$$

同时A_t满足$A_0 = M$，$A_T = 0$，则联合求解可得：

$$C = \frac{i(1+i)^T M}{(1+i)^T - 1}$$

b.

依题意可知，在等额本金还款的情况下，由于每期还款的金额中本金部分是固定的，因此每期所剩余的本金金额会随着时间线性减少，进而每期所需偿还的利息也会相应地随时间线性减少，因此每期还款金额C_t满足如下形式的递推式：

$$C_{t+1} - C_t = \frac{iM}{T}$$

同时，C_t满足$C_1 = \frac{M}{T} + iM$，因此联合求解可得：

$$C_t = \frac{M[1 + i(T - t + 1)]}{T}$$

c.

等额本息还款现金流的现值：

$$PV_1 = \sum_{t=1}^{T} \frac{C}{(1+r)^t} = \frac{i(1+i)^T M}{(1+i)^T - 1} A_r^T = M \frac{A_r^T}{A_i^T}$$

等额本金还款现金流的现值：

$$PV_2 = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t} = \left(\frac{M}{T} + \frac{iM}{T} + iM\right) A_r^T - \frac{iM}{T} \sum_{t=1}^{T} \frac{t}{(1+r)^t}$$

这里令

$$A = \sum_{t=1}^{T} \frac{t}{(1+r)^t} = \frac{1}{(1+r)} + \frac{2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{T}{(1+r)^T}$$

则错位相减得：

$$\frac{1}{(1+r)}+\frac{1}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{1}{(1+r)^T}-\frac{T}{(1+r)^{T+1}}=A-\frac{1}{(1+r)}A$$

化简得：

$$\frac{r}{(1+r)}A=A_r^T-\frac{T}{(1+r)^{T+1}}$$

利用$A_r^T=\frac{1}{r}-\frac{1}{r(1+r)^T}$，进而求得：

$$A=\left(1+T+\frac{1}{r}\right)A_r^T-\frac{T}{r}$$

代回PV_2可得：

$$PV_2=\frac{M}{T}\left(1-\frac{i}{r}\right)A_r^T+\frac{iM}{r}$$

则：

$$PV_1-PV_2=M\left[\frac{A_r^T}{A_i^T}+\left(\frac{i}{r}-1\right)\frac{A_r^T}{T}-\frac{i}{r}\right]$$

由上式可以看出，PV_1和PV_2之间的大小关系取决于i，r和T的值。

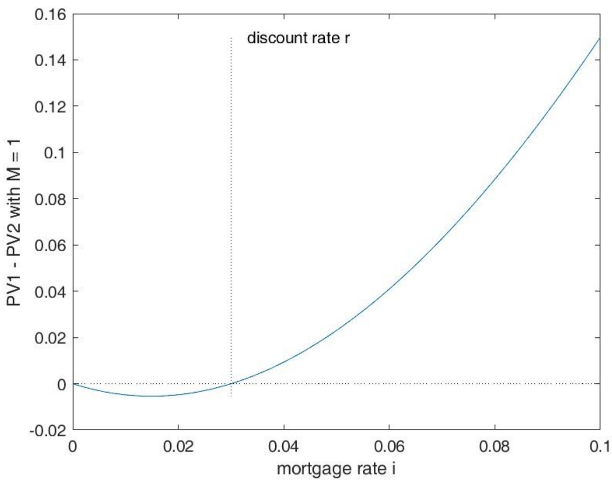
最终结果：

当$T=1$时，无论i与r是何关系，$PV_1=PV_2$恒成立。

当$T>1$时，有三种情况：

1) $i>r$，则$PV_1>PV_2$
2) $i=r$，则$PV_1=PV_2$
3) $i<r$，则$PV_1<PV_2$

例图如下：



注. 若使用具体的数值例子来说明PV_1和PV_2之间的大小关系，需要给出多种情况下的计算结果。

d.

当$i=r$时，由 c 可知：

$$PV_1 - PV_2 = M\left[\frac{A_r^T}{A_i^T} + \left(\frac{i}{r} - 1\right)\frac{A_r^T}{T} - \frac{i}{r}\right] = 0$$

因此，当$i=r$时，$PV_1 = PV_2$。

2. NPV 盈亏平衡点分析

a.

不考虑利息支出，会计利润盈亏平衡点：

$$S^A = \frac{FC + Dep}{P - C} = \frac{FC + \frac{Inv}{T}}{P - C}$$

假设初始投资Inv采取线性折旧法，T期完全折现，之后每期现金流：

$$\begin{aligned} CF &= (P-C)S - FC - [(P-C)S - FC - Dep]\tau_c \\ &= (P-C)S(1-\tau_c) - FC(1-\tau_c) + Dep\cdot\tau_c \end{aligned}$$

S^N满足如下方程

$$Inv = \sum_{t=1}^{T}\frac{CF(S)}{(1+r)^t} = A_r^T CF(S)$$

$$CF(S) = \frac{Inv}{A_r^T}$$

代入每期$Dep = Inv/T$并整理得

$$S^N = \frac{\frac{Inv}{A_r^T} + FC(1-\tau_c) - \frac{Inv}{T}\tau_c}{(P-C)(1-\tau_c)}$$

相减比较大小：

$$\begin{aligned} S^A - S^N &= \frac{\left(FC + \frac{Inv}{T}\right)(1-\tau_c) - \left[\frac{Inv}{A_r^T} + FC(1-\tau_c) - \frac{Inv}{T}\tau_c\right]}{(P-C)(1-\tau_c)} \\ &= \frac{Inv}{(P-C)(1-\tau_c)}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{A_r^T}\right) \end{aligned}$$

因为

$$\mathrm{P} > \mathrm{C}$$
$$0 < \tau_c < 1$$
$$Inv > 0$$

所以

$$\frac{Inv}{(P-C)(1-\tau_c)}>0$$

根据等比公式可得

$$A_r^T=\frac{(1+r)^T-1}{r(1+r)^T}$$

对A_r^T在$r=0$处取极限得

$$\lim_{r\to 0}A_r^T=\lim_{r\to 0}\frac{T(1+r)^{T-1}}{(1+r)^T+rT(1+r)^{T-1}}=T$$

因为A_r^T关于r单调递减，且$0<r<1$，故$A_r^T<T$恒成立，可得

$$\frac{1}{T}-\frac{1}{A_r^T}<0$$

因此

$$S^A<S^N$$

b.

已知投资项目有债务融资且每期支付的利息为Int且可以作为财务成本抵扣所得税，会计利润盈亏平衡点：

$$S^A=\frac{FC+Dep+Int}{P-C}=\frac{FC+\frac{Inv}{T}+Int}{P-C}$$

初始投资Inv采取线性折旧法，T期完全折现，每期支付的利息为Int且可以作为财务成本抵扣所得税，之后每期现金流：

$$\begin{aligned}CF&=(P-C)S-FC-[(P-C)S-FC-Int-Dep]\tau_c\\&=(P-C)S(1-\tau_c)-FC(1-\tau_c)+(Dep+Int)\cdot\tau_c\end{aligned}$$

S^N满足如下方程

$$Inv=\sum_{t=1}^{T}\frac{CF(S)}{(1+r)^t}=A_r^T CF(S)$$

$$CF(S)=\frac{Inv}{A_r^T}$$

代入每期$Dep=Inv/T$并整理得

$$S^N=\frac{\frac{Inv}{A_r^T}+FC(1-\tau_c)-\left(\frac{Inv}{T}+Int\right)\tau_c}{(P-C)(1-\tau_c)}$$

相减比较大小：

$$S^A - S^N = \frac{\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{A_r^T}\right) Inv + Int}{(P - C)(1 - \tau_c)}$$

同理

$$(P - C)(1 - \tau_c) > 0$$

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{A_r^T} < 0$$

因此

$$当Int < \left(\frac{1}{A_r^T} - \frac{1}{T}\right) Inv时，则S^A < S^N$$

$$当Int = \left(\frac{1}{A_r^T} - \frac{1}{T}\right) Inv时，则S^A = S^N$$

$$当Int > \left(\frac{1}{A_r^T} - \frac{1}{T}\right) Inv时，则S^A > S^N$$

注. 计算增量现金流时，不需要考虑利息作为现金流的流出。

3. 放弃期权

a.

考虑期初投资为 12，平均现金流为 6 和-2 的（税后）永续现金流概率均为 50%，且发现现金流为-2 时仍要承担 T 期亏损，则项目期初的 NPV：

$$
\begin{aligned}
NPV &= -12 + 0.5 \times \frac{6}{r} + 0.5 \times \sum_{i=1}^{T} \frac{-2}{(1+r)^i} \\
&= -12 + \frac{3}{r} - \frac{1}{r} \times \left(1 - \frac{1}{(1+r)^T}\right) \\
&= -12 + \frac{2}{r} + \frac{1}{r \times (1+r)^T}
\end{aligned}
$$

b.

令 a 中$NPV = 0$，

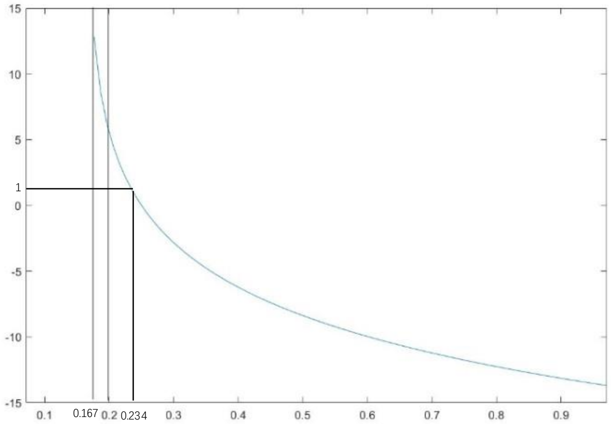
解得：$T = -\log_{1+r}(12r - 2)$，注意此函数定义在$\left(\frac{1}{6}, 0.2\right)$上，且要满足 T≥1。

因此：

当$r \in \left(0.05, \frac{1}{6}\right)$时，总有$NPV > 0$，无临界 N；

当$r=\dfrac{1}{6}$时，当且仅当不执行放弃期权时，$NPV=0$；

当 $r\in\left(\dfrac{1}{6},0.2\right)$时，临界$N=-\log_{1+r}(12r-2)$，为下图中$\left(\dfrac{1}{6},0.2\right)$图线。



4. 决策树

略。