武汉大学本科金融工程专业 2022 春季学期公司金融

第 2 次作业参考答案

1. 对课件 6 中两个资产的例子，假设 $0<\mu_A<\mu_B$ 且 $\sigma_A,\sigma_B>0$，两个资产收益率相关系数为$\rho\in[-1,1]$。
   a. 请推导 $\sigma_w^2=a\mu_w^2+b\mu_w+c$中 3 个系数$a,b,c$的表达式。

   解：

   已知，

$$\mu_w=w\mu_A+(1-w)\mu_B$$
$$\sigma_w^2=w^2\sigma_A^2+(1-w)^2\sigma_B^2+2w(1-w)\rho\sigma_A\sigma_B$$

   可得，

$$w=\frac{\mu_w-\mu_B}{\mu_A-\mu_B}$$
$$\sigma_w^2=w^2(\sigma_A^2+\sigma_B^2-2\rho\sigma_A\sigma_B)+w(2\rho\sigma_A\sigma_B-2\sigma_B^2)+\sigma_B^2$$

   联立上式可得，

$$\begin{aligned}\sigma_w^2&=\left(\frac{\mu_w-\mu_B}{\mu_A-\mu_B}\right)^2(\sigma_A^2+\sigma_B^2-2\rho\sigma_A\sigma_B)+\left(\frac{\mu_w-\mu_B}{\mu_A-\mu_B}\right)(2\rho\sigma_A\sigma_B-2\sigma_B^2)+\sigma_B^2\\&=\frac{\sigma_A^2+\sigma_B^2-2\rho\sigma_A\sigma_B}{(\mu_A-\mu_B)^2}\mu_w^2+\frac{2(\mu_A\rho\sigma_A\sigma_B+\mu_B\rho\sigma_A\sigma_B-\mu_A\sigma_B^2-\mu_B\sigma_A^2)}{(\mu_A-\mu_B)^2}\mu_w\\&+\frac{\mu_A^2\sigma_B^2+\mu_B^2\sigma_A^2-2\mu_A\mu_B\rho\sigma_A\sigma_B}{(\mu_A-\mu_B)^2}\end{aligned}$$

   所以，

$$a=\frac{\sigma_A^2+\sigma_B^2-2\rho\sigma_A\sigma_B}{(\mu_A-\mu_B)^2}$$
$$b=\frac{2(\mu_A\rho\sigma_A\sigma_B+\mu_B\rho\sigma_A\sigma_B-\mu_A\sigma_B^2-\mu_B\sigma_A^2)}{(\mu_A-\mu_B)^2}$$
$$c=\frac{\mu_A^2\sigma_B^2+\mu_B^2\sigma_A^2-2\mu_A\mu_B\rho\sigma_A\sigma_B}{(\mu_A-\mu_B)^2}$$

   b. 请确定 $\sigma_w=\sqrt{a\mu_w^2+b\mu_w+c}$ 当 $\rho=\pm1$ 时的形状特征。

   解：

   当 $\rho=1$ 时，

$$\begin{aligned}\sigma_w&=\sqrt{\left(\frac{\sigma_A-\sigma_B}{\mu_A-\mu_B}\right)^2\mu_w^2+\frac{2(\sigma_A-\sigma_B)(\mu_A\sigma_B-\mu_B\sigma_A)}{(\mu_A-\mu_B)^2}\mu_w+\left(\frac{\mu_A\sigma_B-\mu_B\sigma_A}{\mu_A-\mu_B}\right)^2}\\&=\left|\frac{\sigma_A-\sigma_B}{\mu_A-\mu_B}\mu_w+\frac{\mu_A\sigma_B-\mu_B\sigma_A}{\mu_A-\mu_B}\right|\end{aligned}$$

同理可知，当 $\rho=-1$ 时，$\sigma_w=\left|\frac{\sigma_A+\sigma_B}{\mu_A-\mu_B}\mu_w-\frac{\mu_A\sigma_B+\mu_B\sigma_A}{\mu_A-\mu_B}\right|$。可见，$\mu_w$ 与 σ_w 呈现出线性关系，对应的函数图像为一条折线。

c. 请针对 ρ 的取值，讨论两个收益率的协方差矩阵 $\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_A^2 & \rho\sigma_A\sigma_B \\ \rho\sigma_A\sigma_B & \sigma_B^2\end{bmatrix}$ 是否是正定矩阵。

解：

矩阵 Σ 的特征多项式为：

$$|\lambda E-\Sigma|=\begin{vmatrix}\lambda-\sigma_A^2 & -\rho\sigma_A\sigma_B \\ -\rho\sigma_A\sigma_B & \lambda-\sigma_B^2\end{vmatrix}=\lambda^2-(\sigma_A^2+\sigma_B^2)\lambda+(1-\rho^2)\sigma_A^2\sigma_B^2$$

因此其特征值为：

$$\lambda_{1,2}=\frac{(\sigma_A^2+\sigma_B^2)\pm\sqrt{(\sigma_A^2+\sigma_B^2)^2-4(1-\rho^2)\sigma_A^2\sigma_B^2}}{2},\lambda_1\geq\lambda_2$$

当 $\rho\neq\pm1$ 时，$\lambda_1>0$，$\lambda_2>0$，矩阵 Σ 为正定矩阵；

当 $\rho=\pm1$ 时，$\lambda_1>0$，$\lambda_2=0$，矩阵 Σ 为半正定矩阵。

2. 考虑 n 个风险资产，随机收益率记为列向量 $\boldsymbol{R}=(R_1,\dots,R_n)^\top$，期望收益率为列向量 $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\dots,\mu_n)^\top$，协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}=\left(\sigma_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n}$，$\sigma_{ii}$ 表示第 i 个资产收益率的方差。注意 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是对称矩阵，且我们总假设 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是正定矩阵。记资产组合权重向量为 $\boldsymbol{w}=(w_1,\dots,w_n)^\top$，满足

$$\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{1}_n=w_1+\cdots+w_n=1$$

其中 $\boldsymbol{1}_n=(1,\dots,1)^\top$ 表示全为 1 的列向量。资产组合 $R_w=\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{R}$。故资产组合的期望收益 $\mu_w=\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\mu}$，方差 $\sigma_w^2=\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}$。

a. 现在考虑给定资产组合期望收益 $\mu_w=\mu_e$ 时，资产组合的方差最小化问题。为推导简便起见，我们把目标函数选为 $\frac{1}{2}\sigma_w^2$（最小化该目标函数与最小化 σ_w^2 等价），权重向量 $\boldsymbol{w}$ 需要满足两个约束条件：$\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{1}_n=1$ 和 $\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\mu}=\mu_e$。因此我们把最小化问题写为：

$$\min_{\boldsymbol{w}}\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}\quad \text{s.t.}\quad \boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{1}_n=1\text{ 且 }\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\mu}=\mu_e.$$

其中 $\boldsymbol{w}$ 为选择变量。上述约束最小化问题对应的 Lagrangian 函数（复习高数有关内容）可写为

$$L=\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}-\lambda(\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{1}_n-1)-\delta(\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\mu}-\mu_e),$$

其中 λ 为约束 $\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{1}_n=1$ 对应的乘子，δ 为约束 $\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\mu}=\mu_e$ 对应的乘子。有了 Lagrangian 函数之后，求解约束最小化问题就转化为求解 Lagrangian 函数的极值问题。为此，需要推导 L 关于 $\boldsymbol{w}$ 的导数。我们使用下列向量记号：

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{w}} = \left(\frac{\partial F}{\partial w_1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial w_n}\right)^\top,$$

其中 F 为 n 个变量 $\boldsymbol{w}^\top = (w_1, \dots, w_n)$ 的函数。

i. 当 $F = \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w}$ 时，请验证 $\partial F / \partial \boldsymbol{w} = \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w}$。

注：你可以选择使用"暴力"解法，把 $\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w}$ 写为求和形式 $\sum_i \sum_j w_i \sigma_{ij} w_j$，然后计算其关于 $w_k, k = 1, \dots, n$ 的偏导数。另外一种更简明的办法是定义 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n)^\top$ 为一个列向量，并且每个元素 v_i 都是 $\boldsymbol{w}$ 的函数 $v_i(\boldsymbol{w})$。如此一来 $\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{v} = w_1 v_1(\boldsymbol{w}) + \cdots w_n v_n(\boldsymbol{w})$，你只需要验证 (i)

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w}}{\partial w_k} = w_1 \frac{\partial v_1}{\partial w_k} + \cdots w_n \frac{\partial v_n}{\partial w_k} + v_i$$

以及 (ii) 上式等于 $2v_i$ 即可。

解：

定义，

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n)^\top, v_i = v_i(\boldsymbol{w})$$

可得，

$$\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{v} = w_1 v_1(\boldsymbol{w}) + \cdots w_n v_n(\boldsymbol{w})$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w}}{\partial w_k} = w_1 \frac{\partial v_1}{\partial w_k} + w_2 \frac{\partial v_2}{\partial w_k} + \cdots + v_k + w_k \frac{\partial v_k}{\partial w_k} + \cdots + w_n \frac{\partial v_n}{\partial w_k}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial v_i}{\partial w_k} + v_k = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial v_k}{\partial w_i} + v_k = 2v_k$$

得证，

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{w}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w}}{\partial w_1}, \cdots, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w}}{\partial w_n}\right)^\top = (v_1, \cdots, v_n)^\top = \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w}$$

ii. 当 $F = \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{x}$ 而 $\boldsymbol{x}$ 为一个常数列向量时，请验证 $\partial F / \partial \boldsymbol{w} = \boldsymbol{x}$。

解：

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{w}} = \left(\frac{\partial F}{\partial w_1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial w_n}\right)^\top = \left(\frac{\partial \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{x}}{\partial w_1}, \cdots, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{x}}{\partial w_n}\right)^\top = (x_1, \cdots, x_n)^\top = \boldsymbol{x}$$

iii. 利用上述结论，验证 Lagrangian 函数的导数等于：

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{w}} = \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w} - \lambda \boldsymbol{1}_n - \delta \boldsymbol{\mu}.$$

解：

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{w}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w}}{\partial \boldsymbol{w}} - \lambda \frac{\partial \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{1}_n}{\partial \boldsymbol{w}} - \delta \frac{\partial \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{w}} = \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w} - \lambda \boldsymbol{1}_n - \delta \boldsymbol{\mu}$$

b. Lagrangian 函数的极值条件为 $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{w}} = \mathbf{0}_n$，其中 $\mathbf{0}_n$ 表示一个 $n \times 1$ 的零向量。与最小化问题中的两个约束条件联立，可以得到如下 $n+2$ 个联立方程组：

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma w} - \lambda \mathbf{1}_n - \delta \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}_n & (1) \\ \boldsymbol{w}^\top \mathbf{1}_n = 1 & (2) \\ \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{\mu} = \mu_e & (3) \end{cases}$$

而其中的未知量为权重向量 $\boldsymbol{w}$（共 n 个未知量）以及两个乘子 λ 和 δ，共计 $n+2$ 个未知量。求解该方程，可以得到有效组合权重向量 $\boldsymbol{w}_e$。步骤如下：

i. 请证明 (1) 可重写为

$$\lambda \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n + \delta \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{w},$$

即 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为可逆矩阵。

解：

因为 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为正定矩阵，所以 $|\boldsymbol{\Sigma}| > 0$，$\boldsymbol{\Sigma}$ 为可逆矩阵。

由 (1) 式可得，

$$\lambda \mathbf{1}_n + \delta \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Sigma w}$$

两边同时乘 $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ 可得，

$$\lambda \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n + \delta \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{w}$$

ii. 将上式左乘 $\mathbf{1}_n^\top$，再将上式左乘 $\boldsymbol{\mu}^\top$，得到如下形式的线性方程组：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_e \end{bmatrix} \quad (4)$$

请给出 A, B, C 的表达式，并说明 $A, C > 0$。注：$A, C > 0$ 需要用到 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是正定矩阵这一事实（正定矩阵的逆矩阵是不是正定矩阵？）。

解：

将上式左乘 $\mathbf{1}_n^\top$ 可得，

$$\lambda \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n + \delta \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} = 1$$

将上式左乘 $\boldsymbol{\mu}^\top$ 可得，

$$\lambda \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n + \delta \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} = \mu_e$$

得到方程组：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n & \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n & \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_e \end{bmatrix}$$

所以，

$$\begin{aligned} A &= \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n \\ B &= \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n \\ C &= \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} \end{aligned}$$

正定矩阵的逆矩阵仍为正定矩阵，因此二次型 $f = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{x}$ 为正定二次型。$\forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}_n$，有 $f > 0$，因此 $A, C > 0$。

iii. 求解二元线性方程组 (4)，说明方程的解 λ_e, δ_e 是 μ_e 的线性函数。注：你可以使用 Cramer 法则求 (4) 中系数矩阵的逆。

解：

根据 Cramer 法则可得：

$$D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & B \\ \mu_e & C \end{vmatrix} = C - \mu_e B$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} A & 1 \\ B & \mu_e \end{vmatrix} = \mu_e A - B$$

因此，

$$\lambda_e = \frac{D_1}{D} = \frac{C - \mu_e B}{AC - B^2} = \frac{C}{AC - B^2} + \frac{-B}{AC - B^2}\mu_e$$

$$\delta_e = \frac{D_2}{D} = \frac{\mu_e A - B}{AC - B^2} = \frac{-B}{AC - B^2} + \frac{A}{AC - B^2}\mu_e$$

可见，方程的解 λ_e, δ_e 是 μ_e 的线性函数。

注：此处省略对 $\boldsymbol{D = AC - B^2 > 0}$ 的论证，具体过程见 c 问。

iv. 最优权重可以写为 $\boldsymbol{w}_e = \lambda_e \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n + \delta_e \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$。据此说明

$$\sigma_e^2 = \boldsymbol{w}_e^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w}_e = A\lambda_e^2 + 2B\lambda_e\delta_e + C\delta_e^2,$$

其中 A, B, C 为 (4) 式对应的表达式。进一步说明，给定期望收益率 μ_e 所对应的最小方差组合 $\boldsymbol{w}_e^\top \boldsymbol{R}$ 的方差 σ_e^2 是 μ_e 的二次函数：

$$\sigma_e^2 = a\mu_e^2 + b\mu_e + c \tag{5}$$

二次曲线 (μ_e, σ_e) 就是 n 个资产组合可行集的边界。

解：

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 &= \boldsymbol{w}_e^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w}_e = (\lambda_e \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n + \delta_e \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma} (\lambda_e \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n + \delta_e \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}) \\ &= (\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n)\lambda_e^2 + (\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n)\lambda_e\delta_e + (\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})\delta_e^2 \\ &= A\lambda_e^2 + 2B\lambda_e\delta_e + C\delta_e^2 \end{aligned}$$

进一步带入 λ_e, δ_e 的表达式可得，

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 &= A\left(\frac{C - \mu_e B}{AC - B^2}\right)^2 + 2B\left(\frac{C - \mu_e B}{AC - B^2}\right)\left(\frac{\mu_e A - B}{AC - B^2}\right) + C\left(\frac{\mu_e A - B}{AC - B^2}\right)^2 \\ &= \frac{A}{AC - B^2}\mu_e^2 + \frac{-2B}{AC - B^2}\mu_e + \frac{C}{AC - B^2} \end{aligned}$$

c. 请求出 (5) 式中 a, b, c 关于 $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$ 等参数的表达式；并说明 $a > 0$。

解：

由上问可知，

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{A}{AC-B^2} = \frac{\mathbf{1}_n^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n}{\mathbf{1}_n^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} - (\mathbf{1}_n^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2} \\
b &= \frac{-2B}{AC-B^2} = \frac{-2\times \mathbf{1}_n^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}_n^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} - (\mathbf{1}_n^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2} \\
c &= \frac{C}{AC-B^2} = \frac{\boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}_n^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} - (\mathbf{1}_n^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}
\end{aligned}
$$

因为 $\mathbf{\Sigma}^{-1}$ 为正定矩阵，可构造下述不等式，

$$
(C\mathbf{1}_n - B\boldsymbol{\mu})^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}(C\mathbf{1}_n - B\boldsymbol{\mu}) > 0
$$

化简可得 $AC-B^2>0$，又因为 $A>0$，故 $a>0$ 得证。

d. 请说明有效组合 (μ_e, σ_e) 构成双曲线的一支，并求出其两条渐近线的表达式（写为a, b, c的表示式即可）。

解：

$$
\sigma_e^2 = a\mu_e^2 + b\mu_e + c = a\left(\mu_e + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}
$$

即，

$$
\frac{\sigma_e^2}{c-\frac{b^2}{4a}} - \frac{\left(\mu_e + \frac{b}{2a}\right)^2}{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}} = 1
$$

可见有效组合 (μ_e, σ_e) 构成双曲线的一支，其两条渐近线的表达式为：

$$
\mu_e + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}}\sigma_e
$$

整理得，

$$
\mu_e = \pm\frac{\sigma_e}{\sqrt{a}} - \frac{b}{2a}
$$

e. 基于 (5) 式，求出最小方差点 (μ_m, σ_m) 关于 $\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma}$ 等参数的表达式（写为a, b, c的表示式即可）。

解：

$$
\sigma_e^2 = a\mu_e^2 + b\mu_e + c = a\left(\mu_e + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}
$$

可得，

$$
\mu_m = -\frac{b}{2a} = \frac{\mathbf{1}_n^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}_n^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n}, \sigma_m = \sqrt{c-\frac{b^2}{4a}} = \sqrt{\frac{1}{\mathbf{1}_n^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_n}}
$$

f. 假设无风险资产利率 $r_f < \mu_m$。请计算最优风险资产组合 (μ_*, σ_*) 的表达式（写为a, b, c的表示式即可）。注意最优风险资产组合的确定条件：(μ_*, σ_*) 与 $(r_f, 0)$ 连线与有效前沿相切。

解：

在式 $\sigma^2 = a\mu^2 + b\mu + c$ 中，两边对 σ 求导可得，

$$2\sigma = 2a\mu\frac{d\mu}{d\sigma} + b\frac{d\mu}{d\sigma}$$

可得，

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = \frac{2\sigma}{2a\mu + b}$$

在切点 (μ_*, σ_*) 处有，

$$\frac{2\sigma_*}{2a\mu_* + b} = \frac{\mu_* - r_f}{\sigma_*}$$

与方程 $\sigma_*^2 = a\mu_*^2 + b\mu_* + c$ 联立可得，

$$\mu_* = \frac{-br_f - 2c}{2ar_f + b}$$

$$\sigma_* = \sqrt{\frac{(4a^2c - ab^2)r_f^2 + (4abc - b^3)r_f + (4ac^2 - b^2c)}{\left(2ar_f + b\right)^2}}$$

g. 请将 (μ_*, σ_*) 表示为 $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$ 等初等参数的表达式。

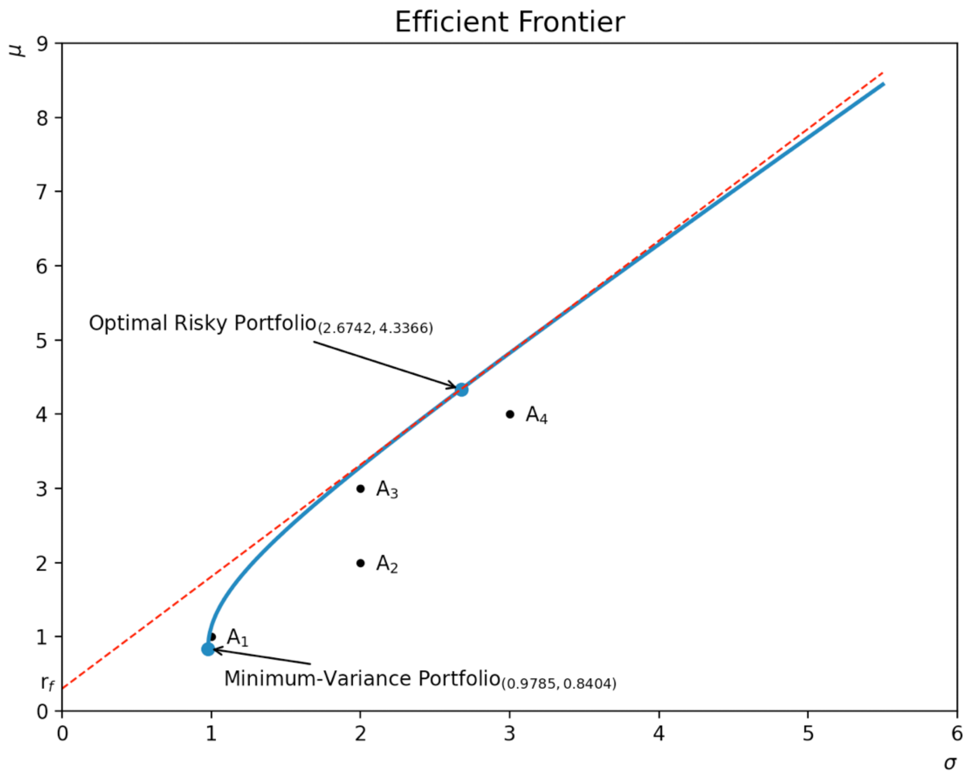
解：

带入化简即可，答案略。

h. 给定 4 个风险资产$A_i = (\mu_i, \sigma_i)$，其中$\mu_1 = 1, \mu_2 = 2, \mu_3 = 3, \mu_4 = 4$而$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = \sigma_3 = 2, \sigma_4 = 3$，而所有资产收益率间的相关系数均为$\rho = 0.5$，无风险利率为$r_f = 0.3$。请在$\mu$-$\sigma$坐标中，利用 Matlab 或 Python 计算最小方差点，绘制有效前沿，确定最优资产组合位置，并考察A_i与可行集边界之间的关系。

解：

如下图所示，风险资产 A_i 均处在可行集边界下方。



i. 假设投资者的初始财富为F_0，选择无风险资产与风险资产（市场组合）的权重为$1-w$与w，最终获得的财富回报为

$$F_1=(1-w)F_0\left(1+r_f\right)+wF_0(1+R_m)=F_0+F_0\left[(1-w)r_f+wR_m\right].$$

投资者的最终效用为终端财富 F_1 函数：$U=F_1-\frac{1}{2}\lambda(F_1-\mathbb{E}F_1)^2$，目标是最大化期望效用。请求解投资者的最优无风险、风险资产配置决策 w^*。

解：

期望效应函数为：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}U&=F_0+F_0\left[(1-w)r_f+w\mathbb{E}R_m\right]-\frac{1}{2}\lambda\mathbb{E}(F_1-\mathbb{E}F_1)^2\\&=F_0+F_0\left[(1-w)r_f+w\mathbb{E}R_m\right]-\frac{1}{2}\lambda\sigma_{F_1}^2\\&=F_0+F_0\left[(1-w)r_f+w\mathbb{E}R_m\right]-\frac{1}{2}\lambda w^2F_0^2\sigma_m^2\end{aligned}$$

最大化期望效用可知，

$$\frac{\partial\mathbb{E}U}{\partial w}=F_0\left(\mathbb{E}R_m-r_f\right)-\lambda wF_0^2\sigma_m^2=0$$

投资者的最优无风险、风险资产配置决策为：

$$w^*=\frac{\mathbb{E}R_m-r_f}{\lambda F_0\sigma_m^2}$$

j. 投资者的最优风险资产配置如何随着 λ 和 r_f 的改变而改变？

解：

根据上问可知，随着 λ 的增大、 r_f 的增加，w^* 会逐渐降低。即随着风险厌恶程度增加，无风险资产收益率提高，投资者将增加无风险资产的组合权重，减少风险资产的组合权重。

k. 若$r_f > \mu_m$，最优风险资产组合是否存在？为什么？

解：

当 $r_f > \mu_m$ 时，过点 $(r_f, 0)$ 的任意一条直线都无法与有效前沿相切，故不存在最优风险资产组合。

注：μ_m 非市场组合的预期收益，而是前面计算的最小方差组合的预期收益。

l. 在 CAPM 模型假设下，市场均衡风险资产组合一定是所有市场投资者共同选择的最优风险资产组合(μ_*, σ_*)，CAPM 定价公式是该最优组合必然满足的性质。请问当$\beta_i < 0$时，课件 PPT 中的推导，是否依然成立？

解：

当 $\beta_i < 0$ 时，推导依然成立。正 β 资产增大了资产组合的风险，同时也为投资者带来了更高的预期收益；而持有负 β 资产相当于为资产组合提供了一个保险，其对组合风险的贡献为负，表明投资者愿意支付一定的代价以换取更稳定的收益。总之，仍然体现了投资者在风险与收益之间的权衡取舍。