Solution for Homework1

本科-公司金融 2022

日期：2022 年 3 月 21 日

1

1.1

企业总资本增加来自两个方面，自有资本投入与外部融资。故总资本增量由留存收益和外部融资组成。具体推导如下：
企业今年总资本：

$$Captial = A \times (1+g)$$

企业今年留存收益：

$$Retainedearnings = PM \times (1+g) \times S \times b$$

由会计恒等式可得

$$A(1+g) = D + E + PM \times (1+g) \times S \times b + EFN$$

结合

$$A = D + E$$

可得

$$EFN = A \times g - PM \times (1+g) \times S \times b = -PM \times S \times b + (A - PM \times S \times b) \times g$$

1.2

令上述得到的 $EFN = 0$，可得

$$g = \frac{PM \times S \times b}{A - PM \times S \times b}$$

分子分母同时除以 A

$$g = \frac{\frac{PM \times S \times b}{A}}{1 - \frac{PM \times S \times b}{A}}$$

由

$$ROA = \frac{PM \times S}{A}$$

故

$$g^I = \frac{ROA \times b}{1 - ROA \times b}$$

此时企业外部融资为零，总资产的增加来自于留存收益，所有者权益增加。故债务水平 D 总量不变，但占总资产比下降

1.3

由于总资产等于负债加所有者权益，那么负债权益比不变也意味着权益/资产不变。故

$$\frac{E}{A} = \frac{E + PM \times S \times (1+g) \times b}{A(1+g)}$$

因此

$$g = \frac{\frac{PM \times S \times b}{E}}{1 - \frac{PM \times S \times b}{E}}$$

结合

$$ROE = \frac{PM \times S}{E}$$

可得

$$g^s = \frac{ROE \times b}{1 - ROE \times b}$$

2

假设 $PV_1 > PV_2 + PV_3$。根据题设，投资者可以自由借贷无风险资金，那么在 t_0 期，投资者可借入一份无风险资金 PV_1，同时贷出无风险资金 $PV_2 + PV_3$。如此，投资者便可以在 t_0 期获得无风险收益 $PV_1 - PV_2 - PV_3$。在往后的 $t = 1, 2, 3$ 期，由于 $CF_t^1 = CF_t^2 + CF_t^3$，那么该投资者的后面每一期净现金流都是 0。通过上述行为，投资者便实现了无风险套利，与金融市场的无套利原则相悖。如此套利机会如若存在，便会有大批的投机者持有无限大的 PV_1 空头和 $PV_2 + PV_3$ 多头，使得第一组现金流价格下降，后两组价格上升，最终达到二者相等的状态，套利机会消失。

故假设不成立，反之亦然。因此，$PV_1 = PV_2 + PV_3$

注. 需要根据题设自由借贷资金，通过现值不相等这一假设证明出存在套利机会，才算是完整的反证。大部分同学并没有指出套利机会存在和套利方式。

3

3.1

按照增长年金定义，标注清楚每期现金流即可，区分已有年金和新增年金

3.2

对每一期的现金流进行折现并求和，可得在 t 期开始的持续 T 期的增长年金在 $t-1$ 期的现值为

$$PV_0 = \frac{C}{1+r} + \frac{C(1+g)}{(1+r)^2} + \frac{C(1+g)^2}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{C(1+g)^{T-1}}{(1+r)^T} = \frac{C}{1+r} \times \frac{\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^T - 1}{\frac{1+g}{1+r} - 1}$$

那么无穷多个年金组合在 $t=0$ 处的现值又可以表示为

$$PV_{SUM} = PV_0 + \frac{PV_0}{1+r} + \frac{PV_0}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{PV_0}{(1+r)^\infty} = \frac{C}{1+r} \times \frac{\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^T - 1}{\frac{1+g}{1+r} - 1} \times \frac{r+1}{r} =$$
$$\frac{C}{r} \times \frac{\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^T - 1}{\frac{1+g}{1+r} - 1}$$

3.3

永续年金的现值为

$$PV_1 = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{C}{(1+r)^T} = \lim_{T\to\infty} \frac{C}{1+r} \times \frac{\left(\frac{1}{1+r}\right)^T - 1}{\frac{1}{1+r} - 1} = \frac{C}{r}$$

$$PV_2 = \frac{C(1+g)}{1+r} + \frac{C(1+g)}{(1+r)^2} + \frac{C(1+g)}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{C(1+g)}{(1+r)^T} =$$
$$\lim_{T\to\infty} \frac{C(1+g)}{1+r} \times \frac{\left(\frac{1}{1+r}\right)^T - 1}{\frac{1}{1+r} - 1} = \frac{C(1+g)}{r}$$

$$PV_3 = \frac{C(1+g)^2}{1+r} + \frac{C(1+g)^2}{(1+r)^2} + \frac{C(1+g)^2}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{C(1+g)^2}{(1+r)^T} =$$
$$\lim_{T\to\infty} \frac{C(1+g)^2}{1+r} \times \frac{\left(\frac{1}{1+r}\right)^T - 1}{\frac{1}{1+r} - 1} = \frac{C(1+g)^2}{r}$$
$$\cdots$$

因此，题干叙述的 T 个这样的永续年金组合的现值为

$$PV = PV_1 + \frac{PV_2}{1+r} + \frac{PV_3}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{PV_T}{(1+r)^{T-1}} = \frac{C}{r} \times \frac{\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^T - 1}{\frac{1+g}{1+r} - 1}$$

由此验证得到上述结果与 b 问一致。

4

存在债务融资时，利息作为财务成本抵扣所得税，每期的现金流入表示为

$$CF(S) = (P - C)S - FC - ((P - C)S - FC - Dep - Int)t_c$$

那么，此时的 S^{NPV} 应满足

$$Inv = \sum_{t=1}^{T} \frac{CF(S)}{(1+r)^t}$$

进而有

$$S^{NPV} = \frac{EAC + FC(1 - t_c) - Dep \times t_c - Int \times t_c}{(P - C) \times (1 - t_c)}$$

注. 计算增量现金流时，不需要考虑利息作为现金流的流出。

5

当 $t = 1$，发现项目永续现金流为 1 时，项目 NPV 为

$$NPV_1 = -12 + \frac{1}{0.2} = -7$$

当 $t = 1$，发现项目永续现金流为 3 并扩大生产，且 $t = 2$ 时开始产生现金流 $(1 + x) \times 3$，此时可以看作是 $t = 1$ 期开始的永续现金流 $(1 + x) \times 3$，该现金流在 $t = 0$ 时刻的现值为

$$\frac{3}{0.2} + \frac{x \times 3}{0.2} \times \frac{1}{1 + 0.2}$$

那么此时项目 NPV 为

$$NPV_2 = -12 - \frac{12 \times x}{1.2} + \frac{3}{0.2} + \frac{x \times 3}{0.2} \times \frac{1}{1 + 0.2}$$

令 $NPV = 0$ 可得

$$0.5 \times (-7) + 0.5 \times (-12 - \frac{12 \times x}{1.2} + \frac{3}{0.2} + \frac{x \times 3}{0.2} \times \frac{1}{1 + 0.2}) = 0$$

解得

$$x = 1.6$$