第六讲：

资产定价模型

武汉大学本科金融工程专业2022春公司金融

授课人：刘岩

本讲内容

- 资产组合理论
- 资本资产定价模型
- 套利定价模型
- BDM 第 10-11 章，RWJ 第 11-12 章

收益率的概率特征

- 每一个资产的收益率都在随时间变动，而且这种变动是事前不确定的(ex ante uncertain)
- 收益率的这种特征可以通过随机变量(random variable)来描述
- 假设一个资产的收益率可以用随机变量 R 来表示（注意区分随机变量和随机变量的特定实现值），R 的取值范围为 $[-1, \infty)$，具有分布函数 $F(\cdot)$
- R 的所有概率特征都由 F 所反映：如期望 $\mathbb{E}R$，方差 $\operatorname{var}(R) = \mathbb{E}[R - \mathbb{E}R]^2 = \mathbb{E}[R^2] - (\mathbb{E}R)^2$，标准差

$$\sigma_R = \sqrt{\operatorname{var}(R)}$$

多个资产收益率的相关性

- 在最简单的情形，考虑两个资产 A 和 B，随机收益率分别为 R_A 和 R_B
- 两个资产收益率的协方差：

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(R_A, R_B) &= \mathbb{E}[(R_A - \mathbb{E}R_A)(R_B - \mathbb{E}R_B)] \\ &= \mathbb{E}[R_A R_B] - \mathbb{E}R_A \mathbb{E}R_B\end{aligned}$$

- 两个资产收益率的相关系数：

$$\rho_{AB} = \frac{\operatorname{cov}(R_A, R_B)}{\sigma_A \sigma_B} = \frac{\operatorname{cov}(R_A, R_B)}{\sqrt{\operatorname{var}(R_A)\operatorname{var}(R_B)}}$$

其中 σ_A, σ_B 分别表示 R_A, R_B 的标准差

期望的线性性

- 对于任意的随机变量 X, Y 和任意的实数 $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $\mathbb{E}[X+Y]=\mathbb{E}X+\mathbb{E}Y$
2. $\mathbb{E}[\alpha X]=\alpha\mathbb{E}X$

- 利用线性性进行运算

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)]\\&=\mathbb{E}[XY-X\mathbb{E}Y-Y\mathbb{E}X+\mathbb{E}X\mathbb{E}Y]\\&=\mathbb{E}XY-\mathbb{E}X\mathbb{E}Y-\mathbb{E}Y\mathbb{E}X+\mathbb{E}X\mathbb{E}Y\\&=\mathbb{E}XY-\mathbb{E}X\mathbb{E}Y\end{aligned}$$

- 性质：$|\rho(X,Y)|\leq 1$，可通过Cauchy-Schwartz不等式证明

期望的线性性

- $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)(X-\mathbb{E}X)] = \mathrm{cov}(X,X)$
- 随机变量线性组合的方差：
$$\mathrm{var}(\alpha X+\beta Y) = \mathrm{cov}(\alpha X+\beta Y, \alpha X+\beta Y)$$
- 协方差的对称双线性性
  1. $\mathrm{cov}(X+Y,Z) = \mathrm{cov}(X,Z)+\mathrm{cov}(Y,Z)$
  2. $\mathrm{cov}(\alpha X,Z) = \alpha\mathrm{cov}(X,Z)$
  3. $\mathrm{cov}(X,Z) = \mathrm{cov}(Z,X)$
- $\mathrm{cov}(\alpha X+\beta Y, \alpha X+\beta Y) = \alpha\mathrm{cov}(X, \alpha X+\beta Y) + \beta\mathrm{cov}(Y, \alpha X+\beta Y) = \alpha^2\mathrm{var}(X) + 2\alpha\beta\mathrm{cov}(X,Y) + \beta^2\mathrm{var}(Y)$

资产组合的收益率：两个资产情形

- 容易验证，w_A 单位 A 和 w_B 单位 B 构成的资产组合(asset portfolio)的收益率为 $w_A R_A + w_B R_B$
- 由期望的线性性可知：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[w_A R_A + w_B R_B] &= w_A \mathbb{E}[R_A] + w_B \mathbb{E}[R_B] \\
\mathrm{var}(w_A R_A + w_B R_B) &= w_A^2 \mathrm{var}(R_A) + w_B^2 \mathrm{var}(R_B) \\
&\quad + 2 w_A w_B \mathrm{cov}(R_A, R_B) \\
&= w_A^2 \mathrm{var}(R_A) + w_B^2 \mathrm{var}(R_B) \\
&\quad + 2 w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}
\end{aligned}
$$

- 当 $\rho_{AB} \neq 1$ 时，其资产组合的<u>标准差</u>（风险）小于两个资产分别的<u>标准差之和</u>；此时两个资产可以相互对冲(hedge)彼此的风险

资产收益率之间的对冲

- 如果 $\rho_{AB} < 1$，则有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{var}(w_A R_A + w_B R_B) \\
&= w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_A w_B \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B \\
&\le w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2|w_A w_B \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B| \\
&\le w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2|w_A w_B \sigma_A\sigma_B| \cdot |\rho_{AB}| \\
&< w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2|w_A w_B \sigma_A\sigma_B| \\
&= (w_A\sigma_A + w_B\sigma_B)^2
\end{aligned}$$

- 资产组合的标准差

$$\sigma_w = \sqrt{\mathrm{var}(w_A R_A + w_B R_B)} < w_A\sigma_A + w_B\sigma_B$$

资产组合的收益率：一般情形

- 考虑 n 个资产 R_i，每个资产在资产组合中的份额为 w_i，$i = 1, \dots, n$
- 用黑体字母 $\boldsymbol{R} = [R_1, \dots, R_n]'$ 表示收益率随机（列）向量，$\boldsymbol{w} = [w_1, \dots, w_n]'$ 表示份额（列）向量，则资产组合可以表示为向量（矩阵）乘积 $\boldsymbol{w}'\boldsymbol{R}$
- $\boldsymbol{R}$ 期望记为 $\boldsymbol{\mu}$：

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}R_1 \\ \vdots \\ \mathbb{E}R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}.$$

- 资产组合收益率的期望为

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{w}'\boldsymbol{R}] = \boldsymbol{w}'\mathbb{E}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{w}'\boldsymbol{\mu}.$$

资产组合期望收益率

- 资产组合收益率

$$R_w = w_1 R_1 + \cdots + w_n R_n = \boldsymbol{w}' \boldsymbol{R}$$

- 资产组合收益率的期望

$$\mathbb{E} R_w = w_1 \mathbb{E} R_1 + \cdots w_n \mathbb{E} R_n = \boldsymbol{w}' \mathbb{E} \boldsymbol{R}$$

收益率向量的协方差矩阵

- 随机收益率向量 $\boldsymbol{R}$ 的<u>**协方差矩阵**</u>定义为：

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\operatorname{cov}(R_1,R_1) & \cdots & \operatorname{cov}(R_1,R_n)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \operatorname{cov}(R_n,R_1) & \cdots & \operatorname{cov}(R_n,R_n)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\mathbb{E}(R_1-\mu_1)(R_1-\mu_1) & \cdots & \mathbb{E}(R_1-\mu_1)(R_n-\mu_n)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \mathbb{E}(R_n-\mu_n)(R_1-\mu_1) & \cdots & \mathbb{E}(R_n-\mu_n)(R_n-\mu_n)\end{bmatrix}$$

资产组合的方差：一般情形

- 随机向量 $\boldsymbol{R}$ 的协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 也可以表示为：
$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{E}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})'.$$
- 资产组合收益率的方差 σ_w^2 为
$$\begin{aligned}\mathrm{var}(\boldsymbol{w}'\boldsymbol{R}) &= \mathbb{E}(\boldsymbol{w}'\boldsymbol{R}-\boldsymbol{w}'\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{w}'\boldsymbol{R}-\boldsymbol{w}'\boldsymbol{\mu})\\ &= \mathbb{E}[\boldsymbol{w}'(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{w}]\\ &= \boldsymbol{w}'\mathbb{E}[(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})']\boldsymbol{w}\\ &= \boldsymbol{w}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}.\end{aligned}$$
- 因此，资产组合收益率的方差 σ_w^2 为权重向量 $\boldsymbol{w}$ 的一个**二次型函数**

协方差矩阵的矩阵表达式

- 收益率向量 $\boldsymbol{R}$ 的协方差矩阵为 $\mathbb{E}[(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})']$
- 首先，$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})$ 为离差向量，并且

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})'$$

$$=\begin{bmatrix} R_1-\mu_1 \\ \vdots \\ R_n-\mu_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_1-\mu_1 & \cdots & R_n-\mu_n \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (R_1-\mu_1)(R_1-\mu_1) & \cdots & (R_1-\mu_1)(R_n-\mu_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (R_n-\mu_n)(R_1-\mu_1) & \cdots & (R_n-\mu_n)(R_n-\mu_n) \end{bmatrix}$$

- 故，$\mathbb{E}[(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})'] = \boldsymbol{\Sigma}$

资产组合的可行集：两个资产情形

- 假设投资者有￥1，要投资在两种资产 A 和 B 上，分别为 $w_A = w, w_B = 1 - w$
- 这个资产组合 R_w 的期望收益率为
$$\mu_w = \mathbb{E}R_w = w\mathbb{E}[R_A] + (1-w)\mathbb{E}[R_B]$$
- R_w 的方差 σ_w^2 为
$$\mathrm{var}(R_w) = w^2\sigma_A^2 + (1-w)^2\sigma_B^2 + 2w(1-w)\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B$$
- 可以注意到，当 w 变动时，μ_w 和 σ_w^2 都在变动更进一步的，我们可以把 w 表示为 μ_w 的线性函数，从而把 σ_w^2 表示为 $\mathbb{E}R_w$ 的二次函数
- 如此得到的 μ_w 与σ_w^2或 σ_w 间的关系称为资产组合的可行集(feasible set)

资产组合的收益与风险

- 由 $\mu_w = w\mu_A + (1-w)\mu_B$，因此

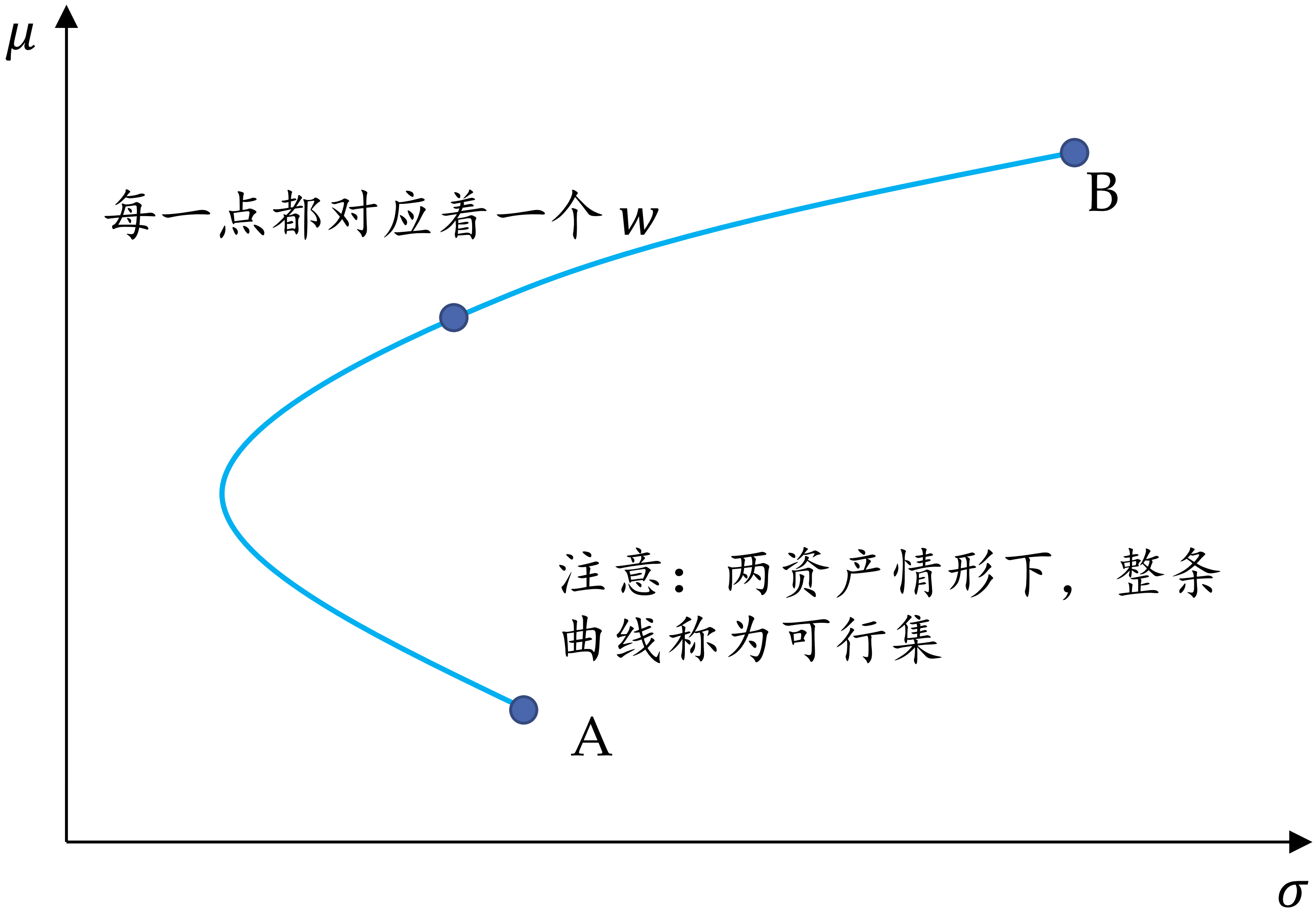
$$w = \frac{\mu_w - \mu_B}{\mu_A - \mu_B}$$

- 资产组合的方差 σ_w^2 可写为

$$w^2\sigma_A^2 + (1-w)^2\sigma_B^2 + 2w(1-w)\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B$$
$$= \sigma_A^2 w^2 + \sigma_B^2(1-2w+w^2) + 2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B(w-w^2)$$
$$= (\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B)w^2 - 2(\sigma_B^2 - \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B)w + \sigma_B^2$$

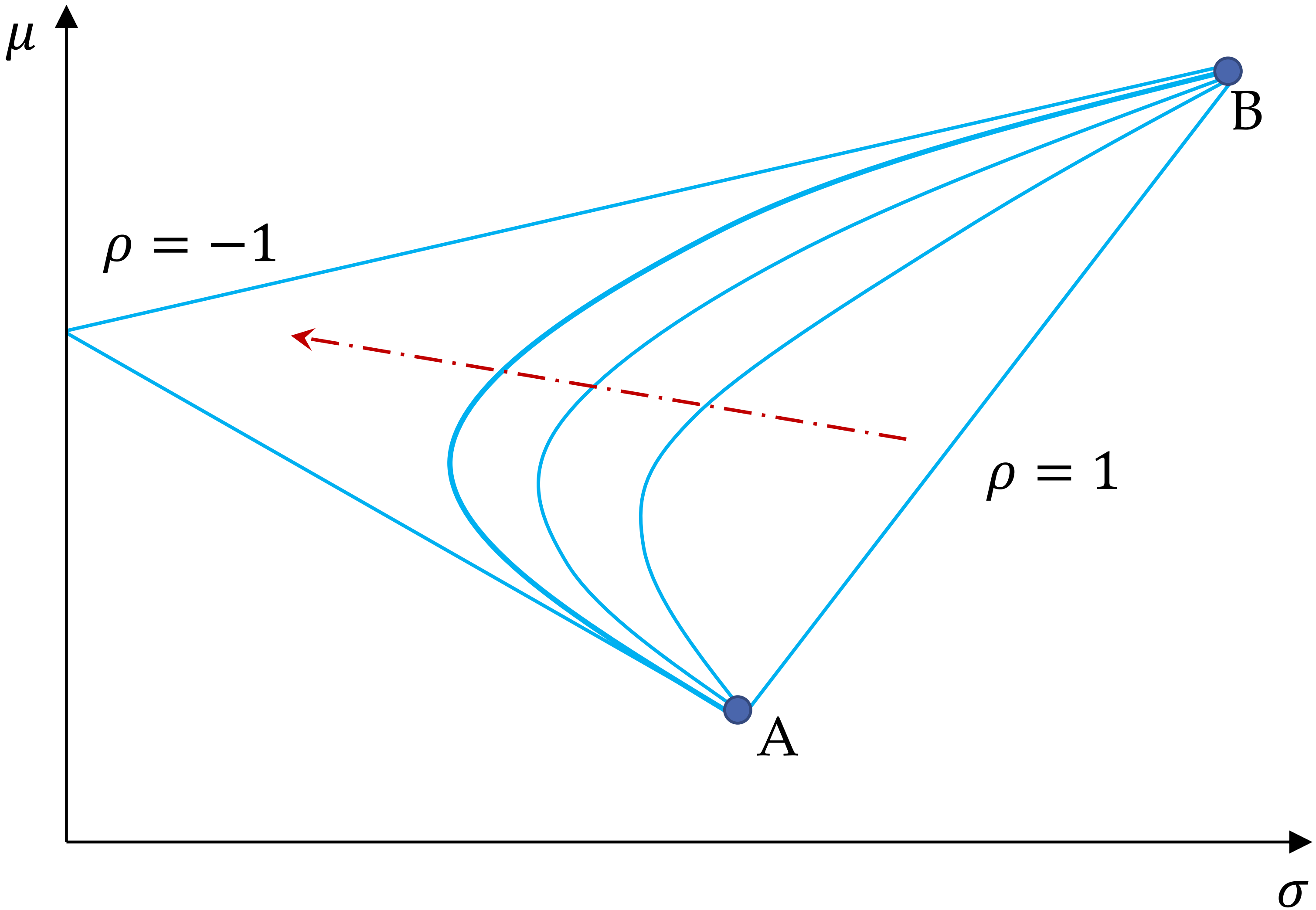
- σ_w^2 是 w 的一个2-次函数；若将 $w = \frac{1}{\mu_A-\mu_B}\mu_w - \frac{\mu_B}{\mu_A-\mu_B}$ 代入，则 σ_w^2 为 μ_w 的 2-次函数

两资产组合示意

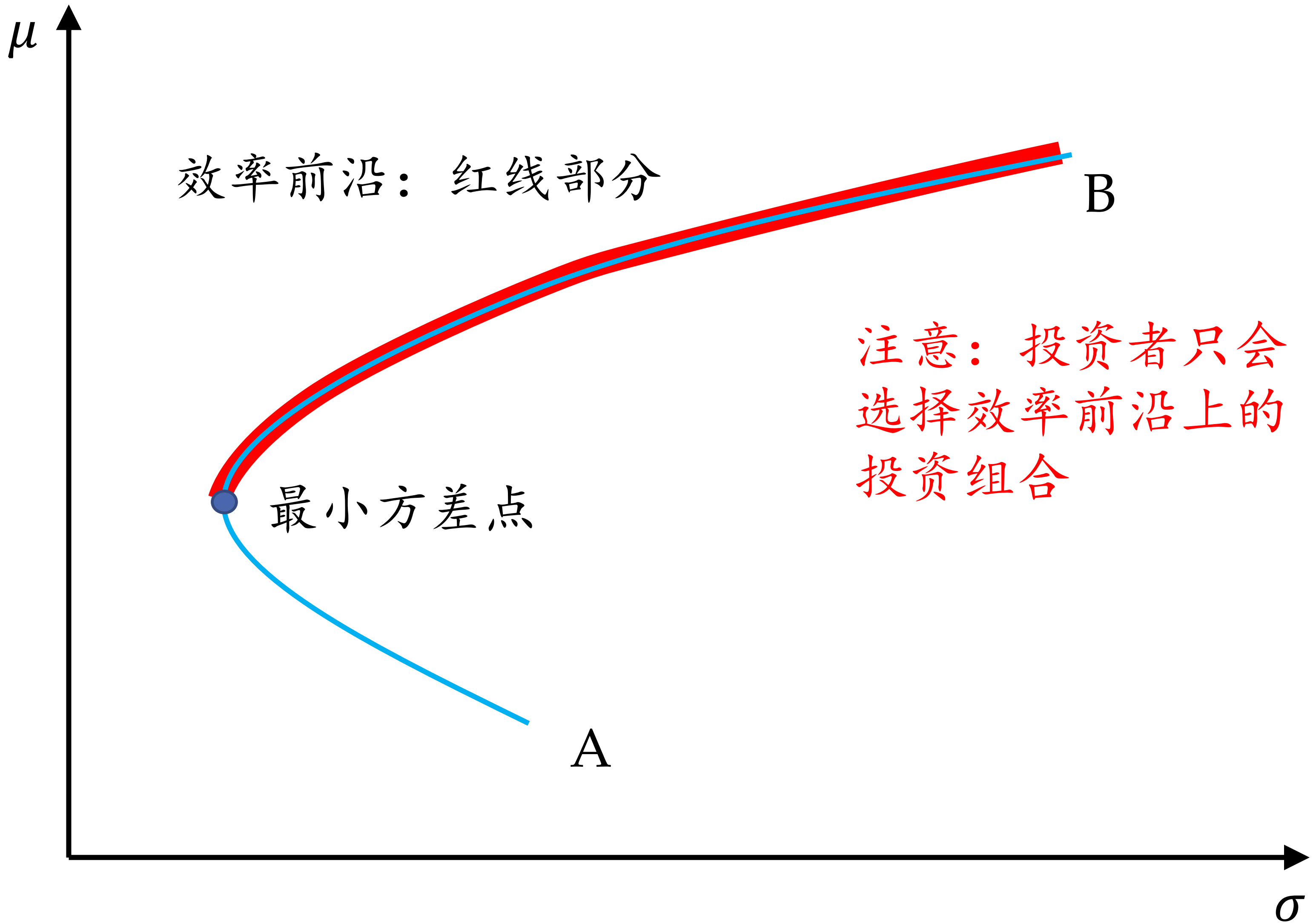


注意：两资产情形下，整条曲线称为可行集

组合边界随相关系数的变动



两资产最小方差组合示例



资产组合有效边界：一般情形

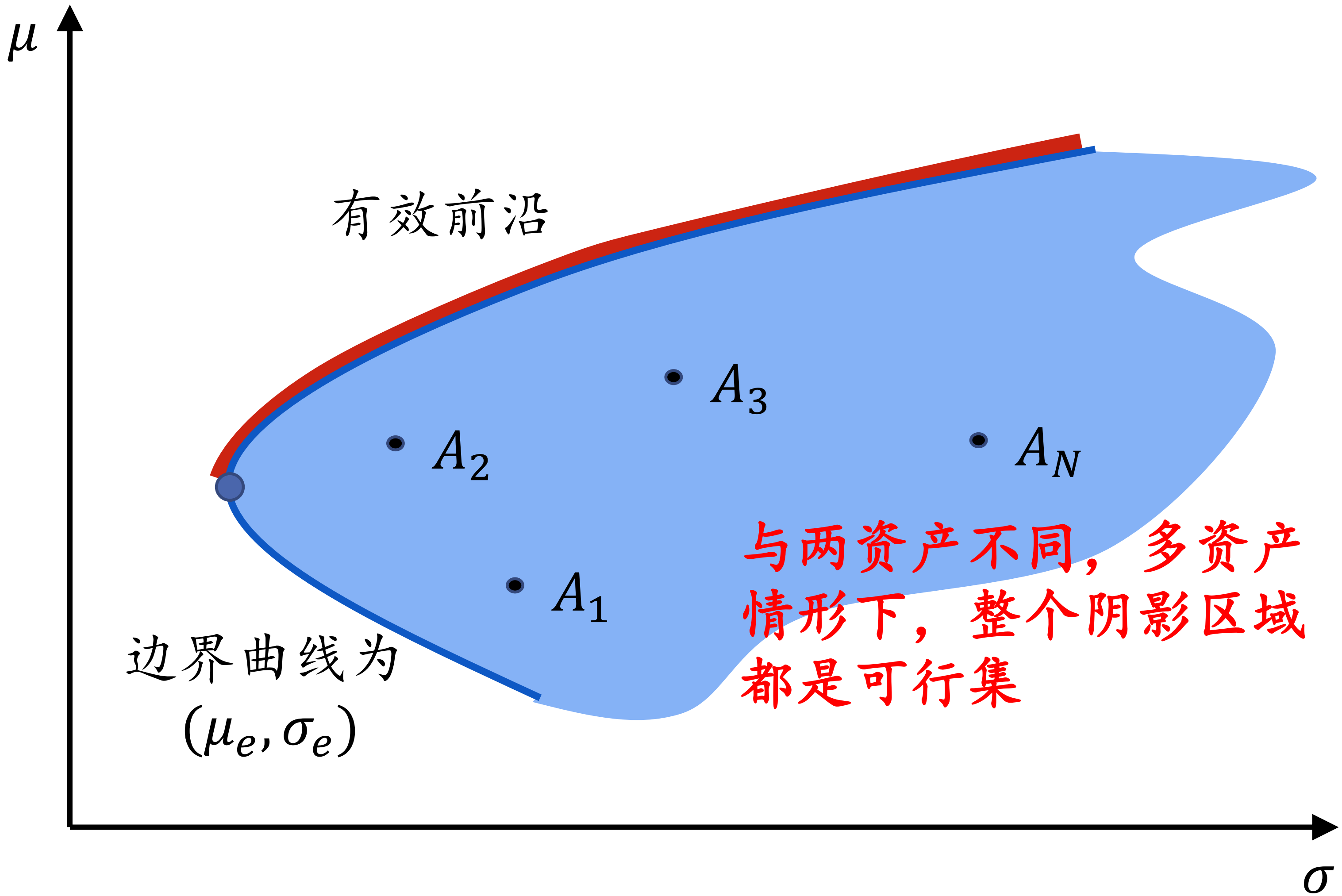
- 当资产数目 $n \geq 3$ 时，资产组合的期望收益-风险关系可以通过求解下列最优化问题得到：

$$\sigma_e^2 = \min_{\boldsymbol{w}} \mathrm{var}(\boldsymbol{w}'\boldsymbol{R}) = \min_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{w}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}$$
$$s.t.\ \boldsymbol{w}'\mathbb{E}\boldsymbol{R} = \mu_e \text{ 且 } \boldsymbol{w}'\boldsymbol{1} = 1$$

  其中 $\boldsymbol{1}$ 表示每个位置取 1 的列向量以 $\boldsymbol{w}_e$ 表示上述问题的最优解

- 当资产组合 $\boldsymbol{w}_e'\boldsymbol{R}$ 的期望收益 μ_e 变化时，资产组合的标准差 σ_e 也会相应变化，从而可以再次得到 (μ_e, σ_e) 组合界定的可行集特别的，σ_e 关于 μ_e 下凸
- 在方差最小点（对所有期望收益 μ_e 而言）之上的可行集边界称为有效前沿

多资产组合



μ
有效前沿
A_3
A_2
A_N
A_1
边界曲线为
(μ_e, σ_e)
与两资产不同，多资产情形下，整个阴影区域都是可行集
σ

资产组合的本质

- 每一个资产的收益率都可以看做是两部分构成：

$$R_i = \underbrace{\mathbb{E}R_i}_{\text{期望收益率}} + \underbrace{U_i}_{\text{随机扰动}}$$

  其中未预期随机扰动满足 $\mathbb{E}U_i = 0$

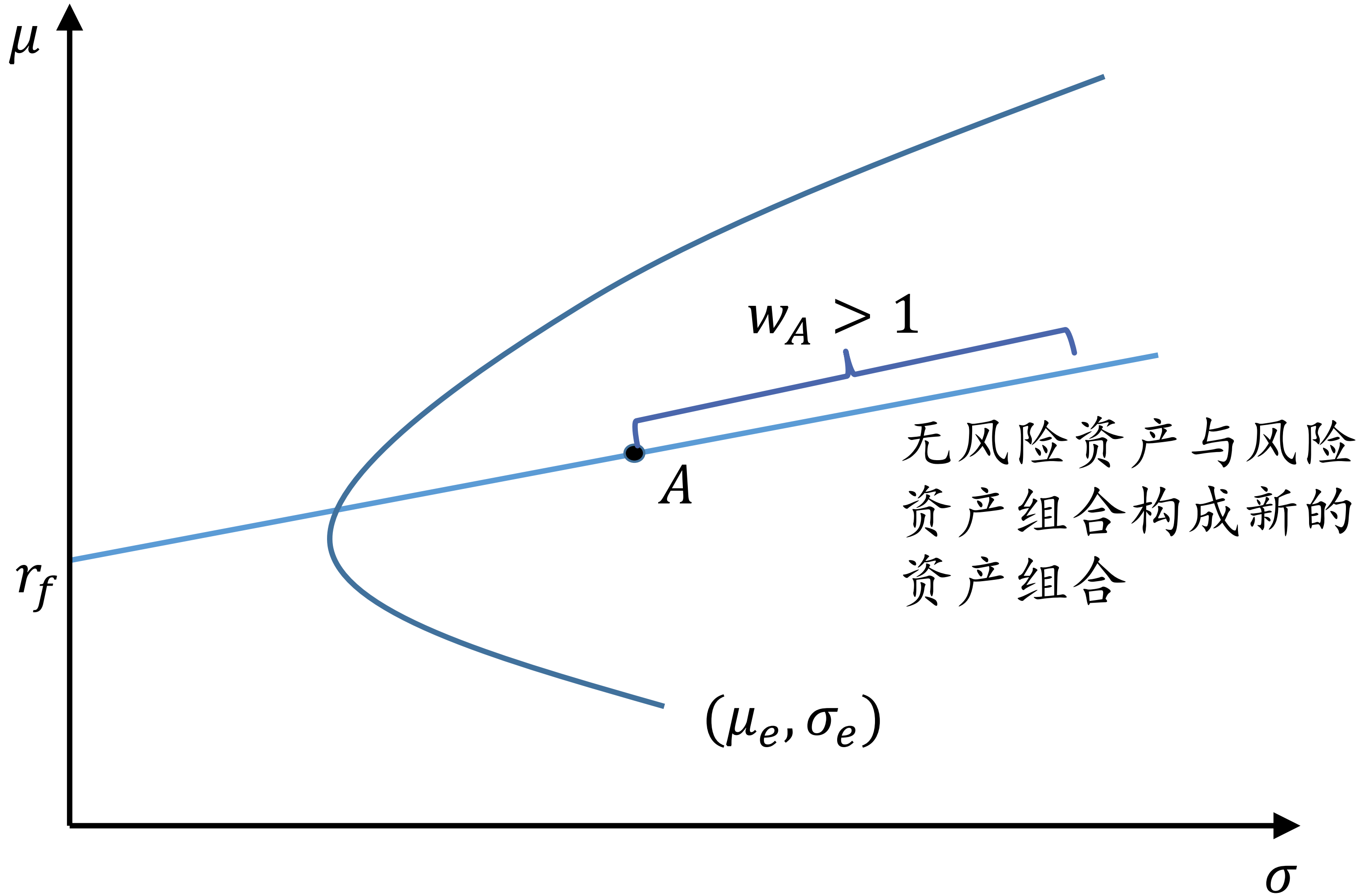
- 未预期部分可以进一步分解：$U_i = m + \epsilon_i$，其中 m 代表系统风险，为所有资产所共有；而 ϵ_i 代表资产 i 的个体异质性风险，互相独立且与 m 无关

- 资产组合可以消除异质性风险：例如 $w_i = 1/n$ 时，可以说明 $\text{var}(\boldsymbol{w}'\boldsymbol{R}) \to \sigma_m^2$，当 $n \to \infty$；而单个资产的方差为 $\sigma_m^2 + \sigma_\epsilon^2$

无风险借贷与资产组合

- 现在考虑一个无风险资产和一个有风险资产的组合，前者的收益率为 R_f 而后者的收益率为 R_A
- 继续考虑持有 w_A 份的风险资产和 $1-w_A$ 份的无风险资产，则此组合的预期收益率及风险为
$$\mathbb{E}R_w = w_A \mathbb{E}R_A + (1-w_A)R_f$$
$$\sigma_w = w_A \sigma_A$$
- 显然可见，若风险资产的预期收益率 $\mathbb{E}R_A$ 高于 R_f，那么资产组合的预期收益总是随风险的上升而上升
- 当 $w_A \geq 1$ 时，$1-w_A \leq 0$，表示投资人在借钱购买风险资产（杠杆投资）

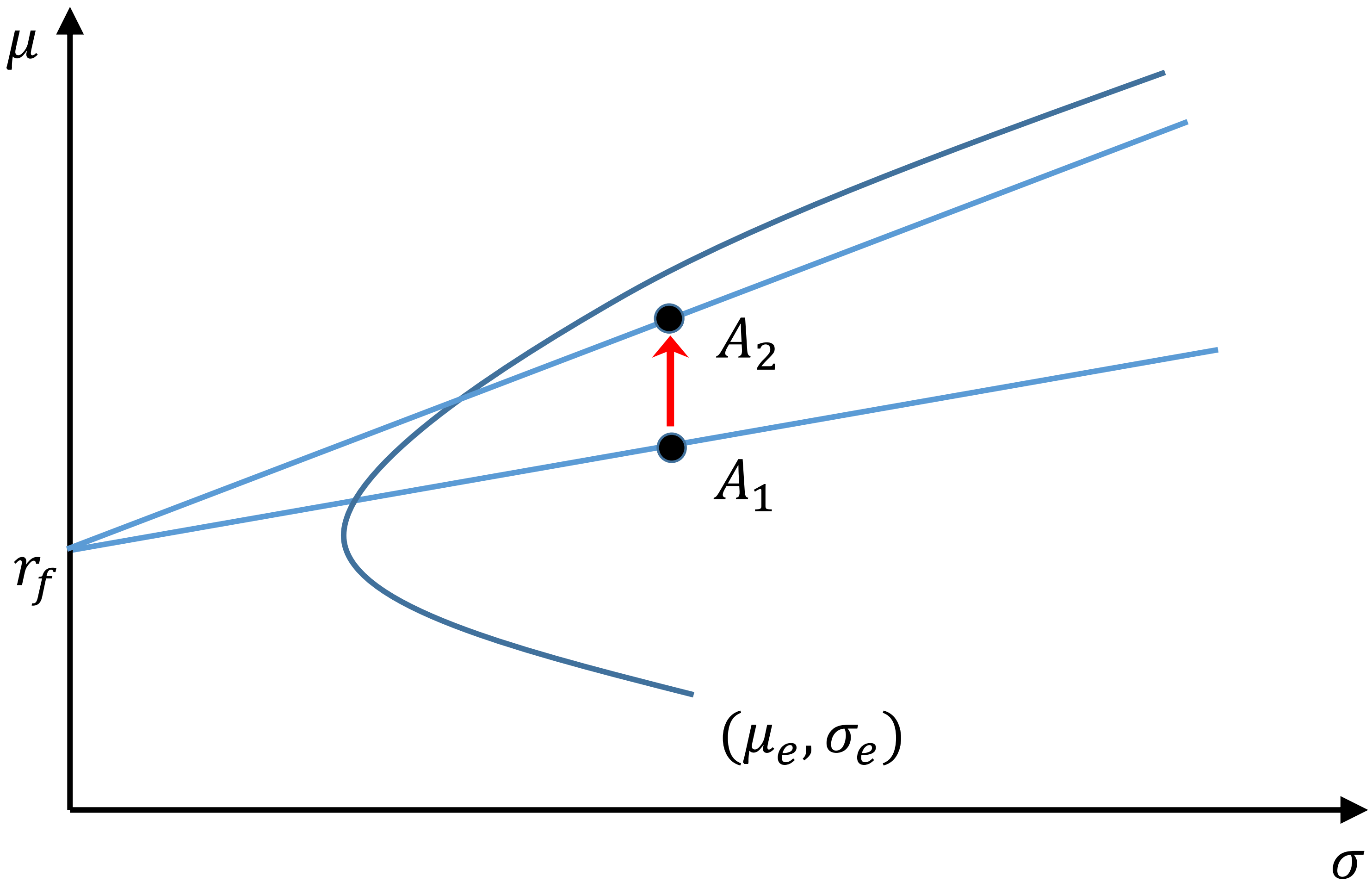
无风险资产与风险资产组合示意



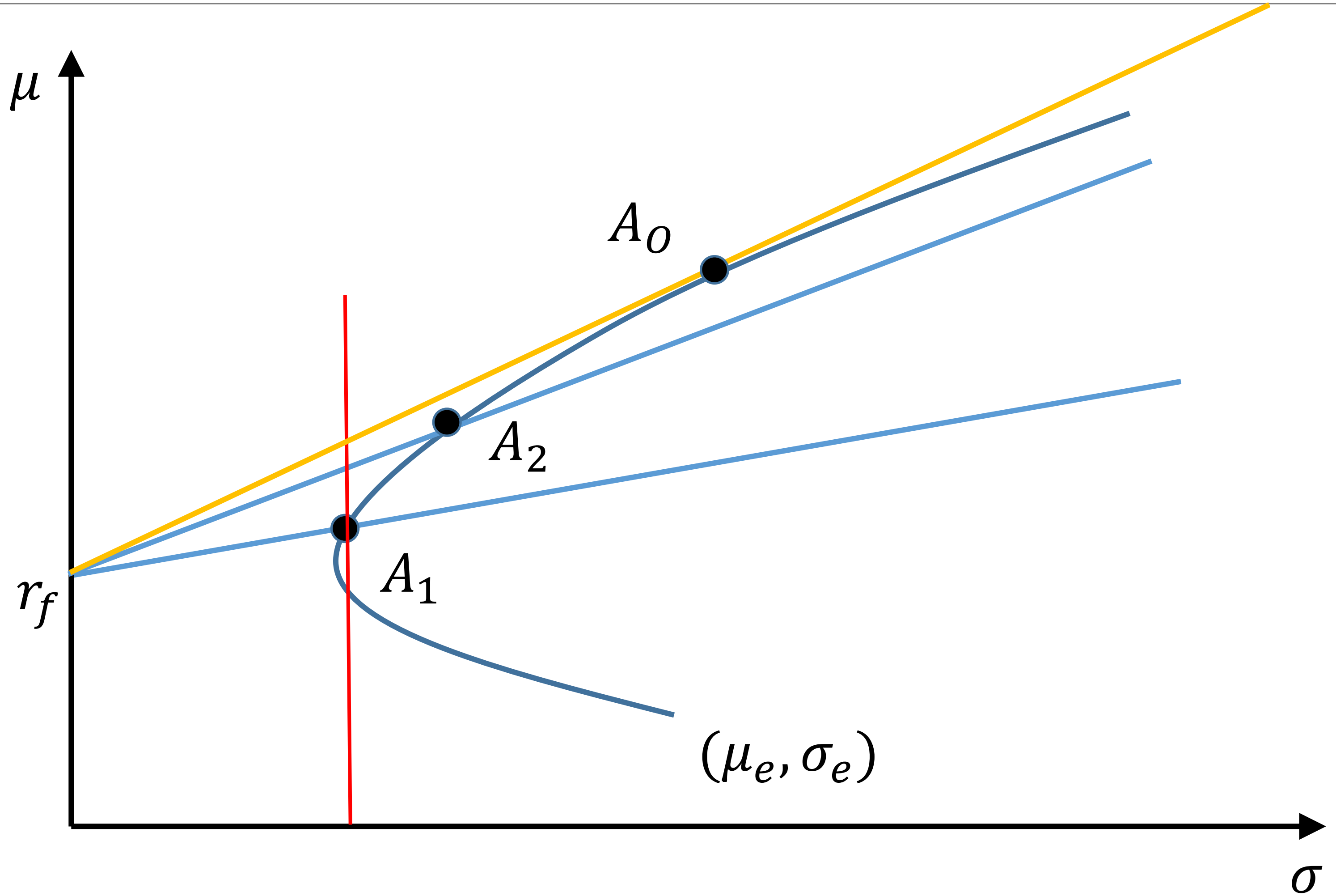
最优风险资产组合

- 投资者的问题包括两部分：挑选合适的风险资产组合 $\boldsymbol{w}'\boldsymbol{R}$，达到一定的风险资产预期收益与风险组合 (μ_A, σ_A)，同时选择合适的无风险资产（持有或者介入），以其满足风险-收益偏好
- 首先，投资者不会选择可行集内部的风险资产组合 (μ_A, σ_A)，而一定会选择有效前沿上的组合 (μ_e, σ_e)
- 其次，投资者一定会选择让无风险-风险组合线与风险资产组合可行集——实质是有效前沿——相切，由此确定最优风险资产组合 $A_* = (\mu_*, \sigma_*)$
- 最终，投资者根据 A_* 和 r_f 确定最终资产组合 w_A^*

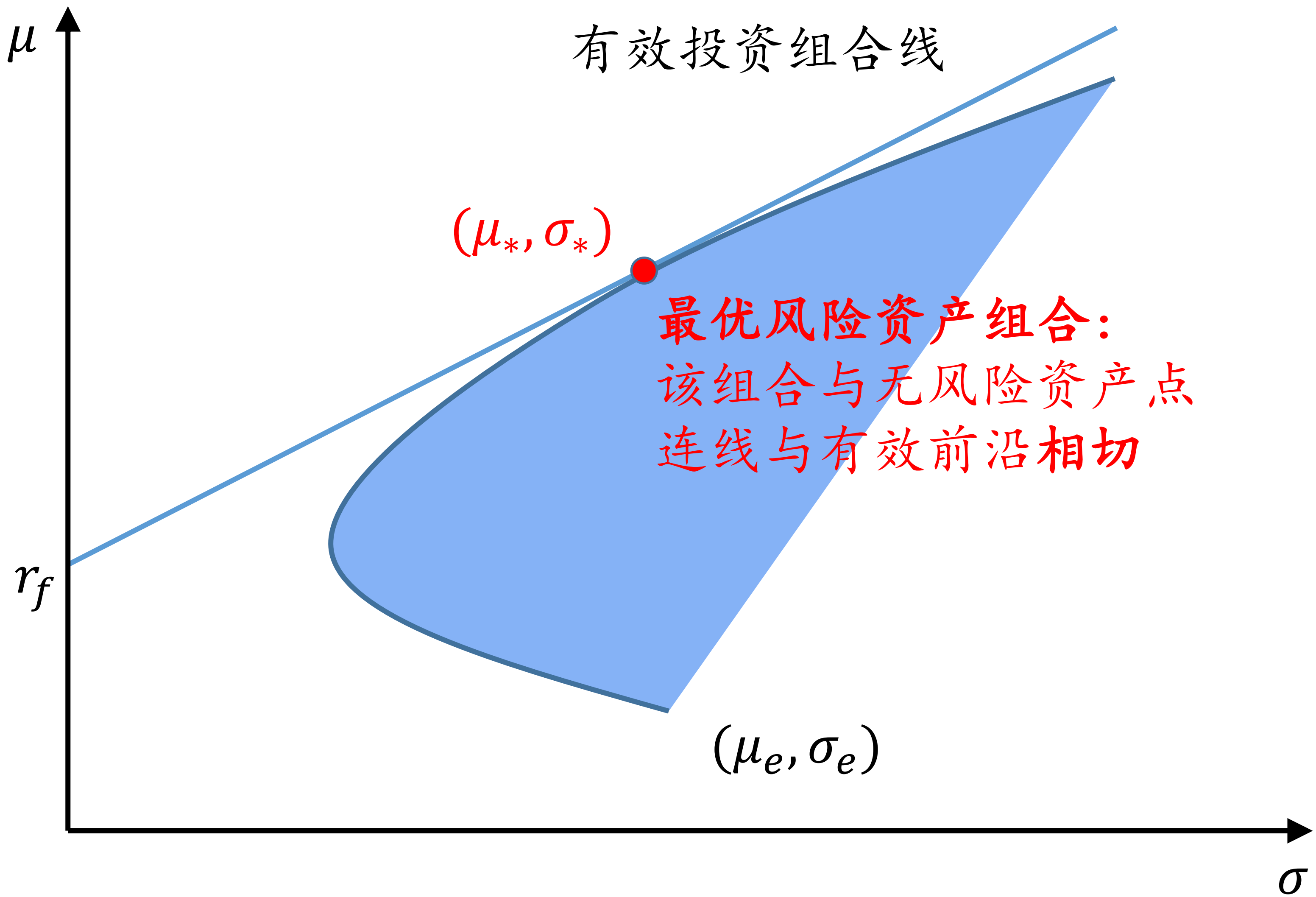
风险资产组合最优选择示意



最优风险资产组合：切点条件



最优风险资产组合示意



μ
有效投资组合线
(μ_*, σ_*)
最优风险资产组合:
该组合与无风险资产点
连线与有效前沿**相切**
r_f
(μ_e, σ_e)
σ

资产定价(asset pricing)与市场均衡

- 和第三讲讨论的无风险市场利率决定一样，风险资产（股票）的收益率也是由市场均衡决定的
  - 市场均衡确定资产收益率等价于确定资产价格：

$$P_t = \frac{C_{t+1} + P_{t+1}}{1 + R_{t+1}} = \frac{C_{t+1}}{1 + R_{t+1}} + \frac{C_{t+2}}{(1 + R_{t+1})(1 + R_{t+2})} + \cdots$$

- 当市场中存在多种资产时，通常可以通过一些基本资产的价格（收益率）来确定其他资产的价格（收益率），这其中最基本的思想就是无套利(no arbitrage)
- 市场中的资产价格同时反映了：时间价值、风险价值和套利价值

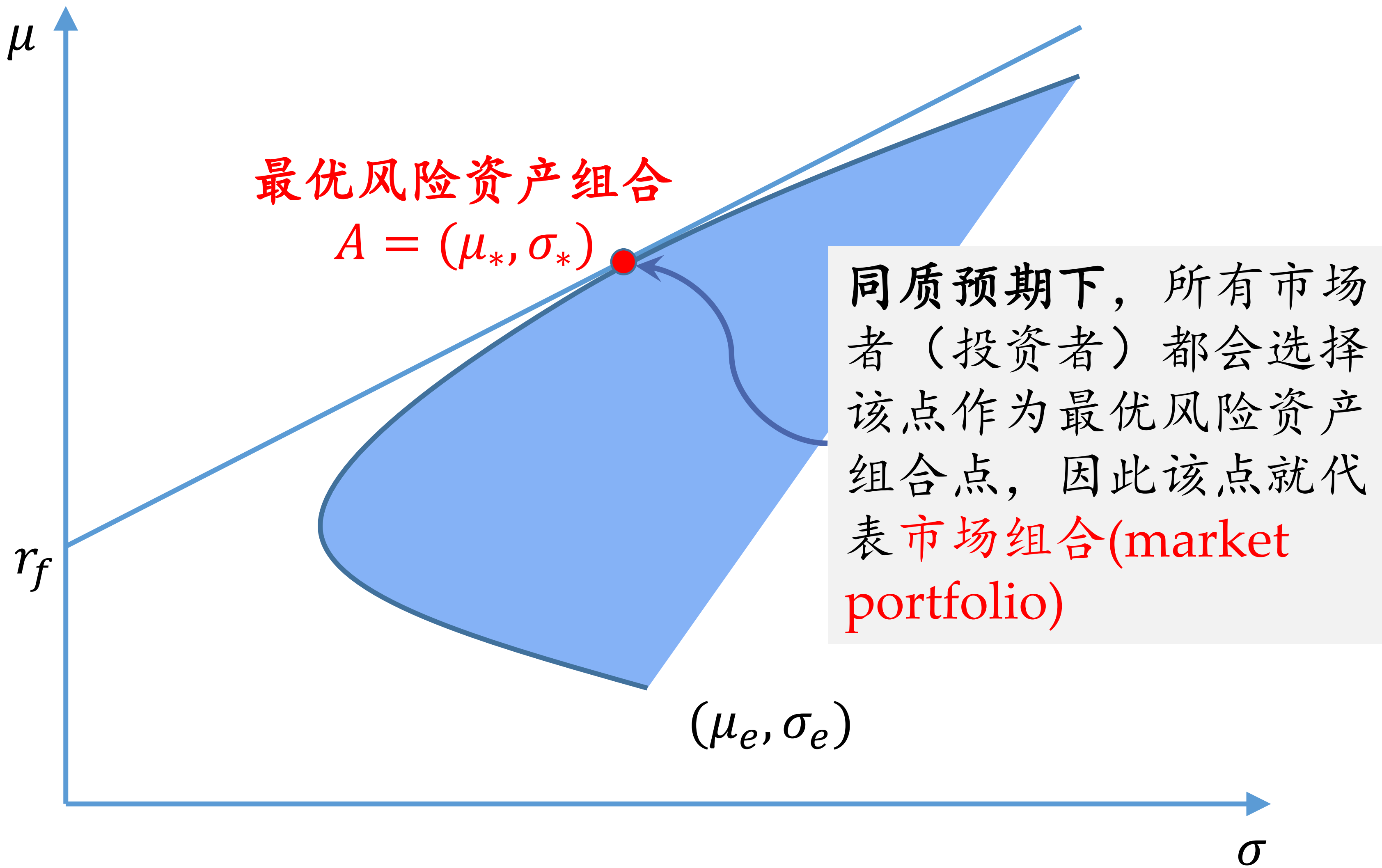
市场均衡的进一步解释

- 在一般的意义上，市场均衡(market equilibrium)是指市场中各种商品的价格 $p = (p_1, p_2, \ldots)$ 和各个交易者对各种商品（净）需求或（净）供给 $x^i = (x_1^i, x_2^i, \ldots)$ 的一个特定状态；在这个状态之下，各商品需求等于供给（净需求/供给为 0），且在给定的价格 p 下，各交易者均实现了自己最优的交易组合
- 这类均衡又称为竞争均衡(competitive equilibrium)；竞争性体现在每个交易者都把价格 p 视为给定的，自己的行为不影响 p
- 我们讨论的资产市场均衡也是在这个意义下

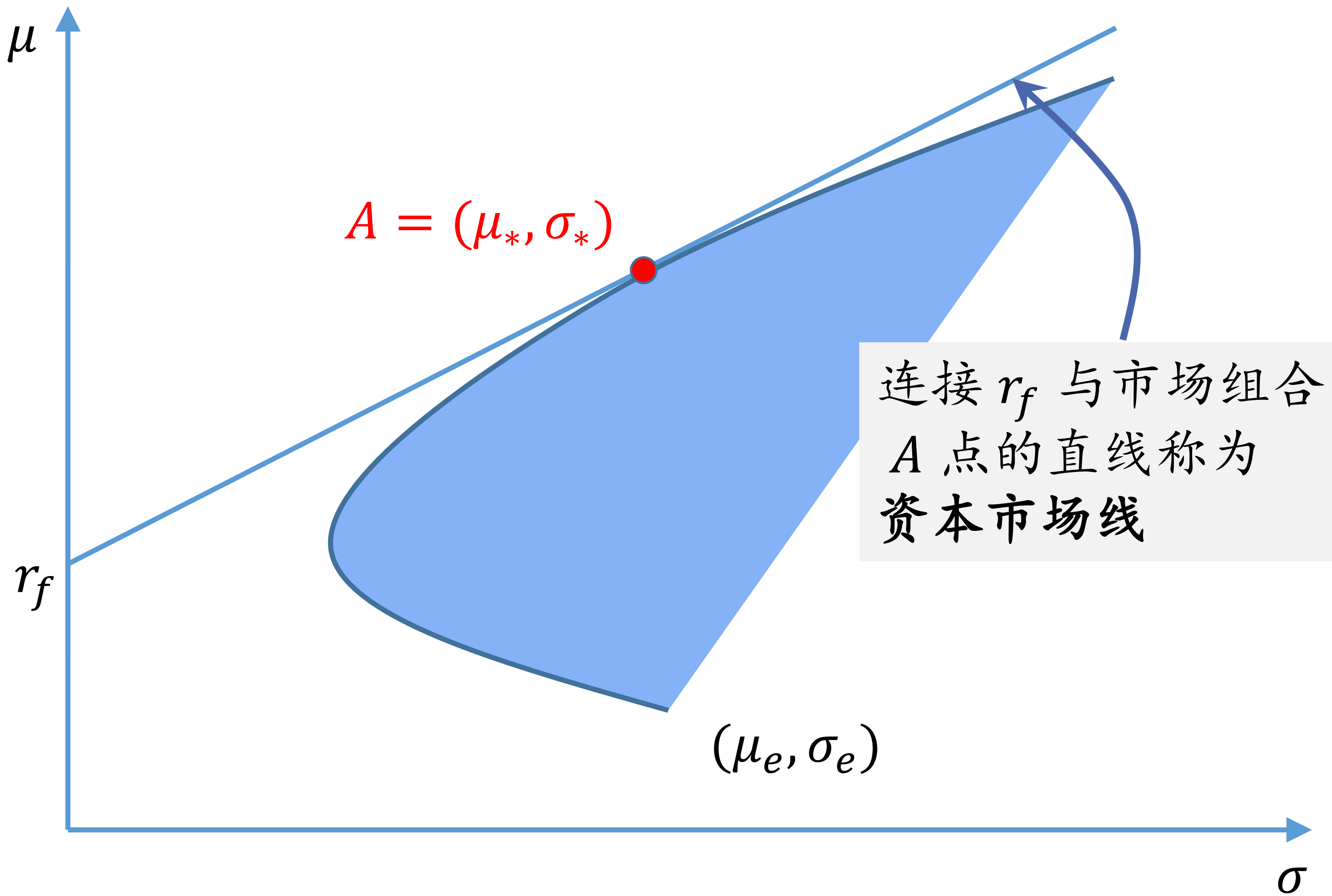
资产市场均衡与信息

- 投资者在做投资决策时需要对资产的未来收益信息有所了解——这些信息由收益率分布 F 表示
- 现实中，不同投资者对 F 的预期(expectation)不尽相同：一是由于各自不同的先验信念(prior belief)；二是由于无处不在的信息差异，即信息不对称(information asymmetry)，因此每个投资人都有自己的 F^i，称为异质预期(heterogeneous expectations)
- 作为最基本的理论分析出发点，经典资产均衡定价理论假设所有投资人具有同质(homogeneous)预期

同质预期下的风险资产组合选择



资本市场线 capital market line



Sharpe 比率与有效投资组合

- 对于任何一个投资组合（包括单个资产），Sharpe 比率定义为超额回报与组合标准差的比：

$$\frac{\mathbb{E}R_w - r_f}{\sigma_w}$$

- 最优投资组合：Sharpe 比率最高的风险资产组合；该组合与无风险借贷一块，可以让投资者在所愿承受的任何风险水平下，实现最高的收益率
- 前面的分析表明，无风险-风险资产组合线与风险资产可行集的切点 A 代表了最优投资组合
- 当投资者有同质预期时，最优投资组合同时还是市场组合

资本资产定价模型

- 资本资产定价模型(capital asset pricing model, CAPM)：在资产组合模型基础上，引入均衡概念，实现对单个风险资产的定价（确定收益率）
  - 现代资产组合模型的奠基人：H. Markowitz 1952 “Portfolio selection” *Journal of Finance*，1990年获诺奖；同期还有 A. Roy 提出了均值-方差分析的模型（1952 *Econometrica*）还有更早的意大利数学家 de Finetti 1940 的类似贡献引入无风险资产从而得到分离定理是由 J. Tobin 所完成（1958 *Review of Economic Studies*，1981年获诺奖）
  - CAPM 的提出者：Lintner 1965 RE&S，Mossin 1966 ECTA，Sharpe 1964 JF（1990年获诺奖）

CAPM 逻辑结构

- 给定投资组合，分析是否要在边际上多投资一单位单个风险资产
- 为此，首先要度量单个风险资产对投资组合的风险贡献；当投资组合为市场组合时，则为系统性风险
- 得到单个风险资产期望收益率所应满足的条件，进而明确市场均衡时该资产期望收益率如何与市场收益率相联系
- 最终得到 CAPM 定价公式
- CAPM 是对期望收益率（期望价格）进行定价

单个风险资产对投资组合的风险贡献

- 给定投资组合 $R_w = w_1 R_1 + \cdots + w_n R_n$，其方差 σ_w^2 可以表示为
$$\mathrm{var}(R_w) = \mathrm{cov}(R_w, R_w) = \mathrm{cov}(w_1 R_1 + \cdots + w_n R_n, R_w)$$
$$= w_1 \mathrm{cov}(R_1, R_w) + \cdots + w_n \mathrm{cov}(R_n, R_w)$$
$$= w_1 \sigma_1 \sigma_w \rho_{1w} + \cdots + w_n \sigma_n \sigma_w \rho_{nw}$$
- 两边同时除以 σ_w 可得：
$$\sigma_w = w_1 \sigma_1 \rho_{1w} + \cdots + w_n \sigma_n \rho_{nw}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_w}{\partial w_i} = \sigma_i \rho_{iw}$$
- 因此，增大一单位的资产 i 的投资（w_i 增加一单位），对组合风险的边际贡献为 $\sigma_i \rho_{iw}$

是否增加投资：Sharpe 比率

- 给定投资组合 R_w，是否应当多投资一单位资产 i？
- <u>假设</u>：投资组合足够大，多投资资产 i 的个体风险可忽略不计，只计算其对投资组合的风险贡献 $\sigma_i \rho_{iw}$
  - 若是市场组合，则称这一部分风险为系统风险
- 多投资 i 的期望收益为 $\mathbb{E}R_i$，需要的资金成本为 r_f 用 $\sigma_i \rho_{iw}$ 计算的 Sharpe 比率为 $(\mathbb{E}R_i - r_f)/(\sigma_i \rho_{iw})$
- 只有当新增投资的 Sharpe 比率大于已有组合 Sharpe 比率时才有必要增加投资：

$$\frac{\mathbb{E}R_i - r_f}{\sigma_i \rho_{iw}} \geq \frac{\mathbb{E}R_w - r_f}{\sigma_w}$$

必要收益率与 β

- 新增投资 Sharpe 比率条件可以改写为

$$\mathbb{E}R_i - r_f \geq \frac{\sigma_i \rho_{iw}}{\sigma_w}(\mathbb{E}R_w - r_f)$$

- 定义上式右端系数为 β_{iw}：

$$\beta_{iw} = \frac{\sigma_i \rho_{iw}}{\sigma_w} = \frac{\mathrm{cov}(R_i, R_w)}{\mathrm{var}(R_w)}$$

- 定义必要收益率

$$r_i = r_f + \beta_{iw}(\mathbb{E}R_w - r_f)$$

- 是否投资于资产 i 取决于 $\mathbb{E}R_i$ 和 r_i 的大小关系：当 $\mathbb{E}R_i \geq r_i$ 时，才会增加对 i 的投资
- β_{iw} 衡量了必要收益率对组合收益变动的敏感程度

市场均衡

- 当市场均衡时，所有投资者都选择有效投资组合 A ——资本市场线与有效前沿的切点对应的风险资产投资组合
- 因此这个组合也就是均衡市场投资组合，其收益率记为 R_M，期望值（平均值）记为 $r_M = \mathbb{E}R_M$
- 此时，市场中一支证券 i 的必要收益率为
$$r_i = r_f + \beta_i\left(r_M - r_f\right)$$
其中 $\beta_i = \operatorname{cov}(R_i, R_M)/\operatorname{var}(R_M)$ 表示资产 i 关于市场组合的 β
- β_i 反映了资产 i 的系统性风险

CAPM 收益率定价公式

- 市场均衡时，资产 i 的预期收益率 $\mathbb{E}R_i$ 需要满足：
$$\mathbb{E}R_i = r_i = r_f + \beta_i(r_M - r_f)$$
CAPM 定价公式
- 资产预期收益率等于其关于市场组合的必要收益率
- 如果 $\mathbb{E}R_i < r_i$，那么投资于资产 i 的 Sharpe 比率低于市场组合，意味着承担的额外系统性风险没有得到恰当补偿，因此对 i 的需求小于供给——为恢复供需平衡，价格会下降从而提高预期收益率
- 反之，如果 $\mathbb{E}R_i > r_i$，则会有超额需求——为恢复供需平衡，价格会上升，从而降低预期收益率

权益风险溢价

- 考虑股票市场，CAPM 定价公式中市场组合预期收益率与无风险利率的差 $r_M - r_f$ 称为权益风险溢价 (equity risk premium)，该值衡量权益资本总体相对于无风险资产的风险溢价水平

国家、地区	权益风险溢价历史平均	Sharpe 比率
中国	14.77%	0.467
美国	7.83%	0.511
欧洲	6.44%	0.368
日本	0.24%	0.013

数据来源：Carpenter, Lu, & Whitelaw (2021, JFE)，样本期：1995-2016

CAPM 的拓展

- 上面分析的 CAPM 也称为 Lintner-Sharpe 版本：
$$\mathbb{E}R_i = r_f + \beta_i\left(r_M - r_f\right)$$
- 其理论预测非常强：资产超额收益与市场超额收益成正比，与其 β 也成正比，且与其他变量无关
- Fischer Black 1972 放松了可以按照无风险利率 r_f 任意借款的假设，相应的定价公式变为
$$\mathbb{E}R_i = \mathbb{E}R_{ZM} + \beta_i(r_M - \mathbb{E}R_{ZM})$$
其中 $\mathbb{E}R_{ZM}$ 表示一 β 为 0 的资产组合预期收益率
- CAPM 的核心预测：资产预期收益正比于其 β
- 这一线性关系也称为证券市场线

CAPM 的实证表现

- 70 年代，随着 Chicago Univ. Center for Research in Security Prices (CRSP) 的建立，股票价格、股利等收益数据得到系统性的整理，CAPM 定价公式的实证研究得以实现：对下面这类方程进行回归

$$R_{it} - r_f = \alpha_i + \gamma\beta_i + \epsilon_{it}$$

- CAPM 理论预测 $\gamma > 0$，回归结果证实了这一点
- 但其他预测，比如 $\alpha_i = 0$ 以及 $\gamma = r_M - r_f$ 等，实证检验并不成功
  - 总结：Fama & French 2004 JEP

资产收益率的因子模型

- 受 CAPM 理论定价公式的启发，以及 CAPM 实证方面遇到的各种问题，70 年代开始金融经济学家开始发展资产收益率的因子模型
  - 开创性工作为 S. Ross 1976 JET
- CAPM 本身就可以视作一个单因子模型

$$\mathbb{E}R_i = r_f + \beta_i \underbrace{\left(r_M - r_f\right)}_{\text{因子：市场风险}}$$

- 写为收益率的形式：

$$R_i = \mathbb{E}R_i + \epsilon_i = r_f + \beta_i\left(r_M - r_f\right) + \epsilon_i$$

资产收益率为市场风险因子加个体性风险 ϵ_i

一般的因子模型

- 资产收益率写为其期望值、系统性风险与个体风险三部分之和

$$R_i = \bar{R}_i + m_i + \epsilon_i$$

- 因子模型假定系统性风险 m_i 可以表示为少数几个风险因子的组合

$$m_i = b_i^1 F_1 + \cdots + b_i^K F_K = \boldsymbol{b}_i' \boldsymbol{F}$$

其中 $\boldsymbol{b}_i'$ 称为因子载荷(factor loading)，$\boldsymbol{F}$ 为一组对所有资产都起作用的共同因子

- 由于个体风险 ϵ_i 的存在，此类模型称为带噪音的因子模型(noisy factor model)

- 若 $\epsilon_i = 0$，称为精确因子模型

套利定价：精确因子模型

- 对于精确因子模型，可以使用无套利原理进行定价
- 下面值讨论单因子情形，一般情形参考王江《金融经济学》第14章
- 假设所有资产都满足单因子模型：
$$R_i = \bar{R}_i + b_i F, \qquad \forall i = 1, \dots, n$$
各资产的因子载荷 b_i 均不相同；此外，还存在无风险资产，收益率为 r_f
- 套利定价（实际上是无套利定价）最终关心 $\bar{R}_i$ 等于多少

精确单因子模型套利定价

- 对任意两个资产 i,j，可以选择适当的投资比例 w 满足 $wb_i+(1-w)b_j=0$这样构造的投资组合 $wR_i+(1-w)R_j=w\bar{R}_i+(1-w)\bar{R}_j$ 为一个无风险组合，故其收益率必须等于 r_f，故

$$w\bar{R}_i+(1-w)\bar{R}_j=r_f \Rightarrow \frac{\bar{R}_i-r_f}{b_i}=\frac{\bar{R}_j-r_f}{b_j}\equiv\lambda$$

- λ 与具体资产 i 无关，称为因子溢价(factor premium)
- 因此，$\bar{R}_i=r_f+b_i\lambda$ 成立

一般因子模型与套利定价

- 对一般因子模型，由于个体风险 ϵ_i 的存在，无法直接使用（无）套利定价的论证方式
- 不过，当资产数目足够大时，可以通过构造资产组合来分散个体风险；这样构造的资产组合可以看做是只受系统性风险因子影响，近似等价于精确因子模型
- 极限状况下，可以说明各个资产预期收益率必须满足一定的形式：$\bar{R}_i \approx r_f + b_i^1 \lambda_1 + \cdots + b_i^K \lambda_K$，背后的逻辑称为极限套利(limit arbitrage)
- 注意：极限套利不是套利；无套利是资产市场均衡的自然结果，但极限套利不是

资产定价的实证因子模型

- Fama & French 1992/1993 三因子模型

$$\bar{R}_{it} = a + b_M(r_{Mt} - r_{ft}) + b_S \cdot Size_t + b_{MB}\left(\frac{M}{B}\right)_t + \epsilon_{it}$$

- Fama & French 2015 五因子模型

$$\bar{R}_{it} = \cdots + b_P \cdot Pro_t + b_I \cdot Inv_t + \epsilon_{it}$$

- 关于中国的情形：王菡田、朱英姿 2011《金融研究》考虑了 8 个因子——市场风险溢价，账面市值比，盈利股价比，现金流股价比，投资资本比，工业增加值变化率，回购利率和期限利差