

### 第 3 次作业参考答案

1. 假设有  $N$  个船东，每人有一艘船。每艘船出事沉没的概率为 0.1，此时船只回报为 0；每艘船顺利回港的概率为 0.9，此时船只回报为 10 万元。船只出事沉没的事件是相互独立的。不考虑任何税收。船东有两种经营选择，一种是个体经营，另一种是联合起来成立股份公司，每人占公司股份的  $N$  分之一。

- a. 请计算两种经营方式下各个船东所获回报的期望与风险（标准差），并确定  $N \rightarrow \infty$  时成立公司的收益与风险极限值。

解：设船只顺利回港次数为  $X$ ，则  $X \sim B(N, 0.9)$

每个船东获回报为  $w$  个体经营：

$$E(w) = 0.1 \times 0 + 0.9 \times 10 = 9 \text{ (万元)}$$

$$D(w) = 0.1 \times 9^2 + 0.9 \times 1 = 9$$

$$\text{风险: } \sigma_1 = \sqrt{D(w)} = 3$$

联合成立股份公司：

$$E\left(\frac{Nw}{N}\right) = E\left(\frac{10X}{N}\right) = 10 \times 0.9 \times N/N = 9 \text{ (万元)}$$

$$D\left(\frac{Nw}{N}\right) = D\left(\frac{10X}{N}\right) = \frac{100}{N^2} (0.9 \times 0.1 \times N) = \frac{9}{N}$$

$$\sigma_2 = \sqrt{D\left(\frac{Nw}{N}\right)} = \frac{3}{\sqrt{N}}$$

所以，当  $N \rightarrow \infty$  时，成立公司的收益和风险极限值分别为：

$$E = 9 \text{ 万元}, \sigma_2 = 0$$

- b. 请讨论船东们是否应当成立股份公司。

解：由 a 问可知，成立股份公司后，每个股东所获期望收益与个体经营相同，但风险减少，在  $N \rightarrow \infty$  时风险  $\rightarrow 0$ 。故应当成立股份公司。

- c. 若任意两艘船只（随机）回报间的相关系数为  $0 < \rho < 1$ ，请问上述结论如何改变？特别的，计算此情形  $N \rightarrow \infty$  时公司股东回报的期望与风险极限值。

解：可知协方差矩阵为  $\Sigma = \begin{bmatrix} 9 & \dots & 9\rho \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 9\rho & \dots & 9 \end{bmatrix}$

期望收益为  $E_3 = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} = 9$

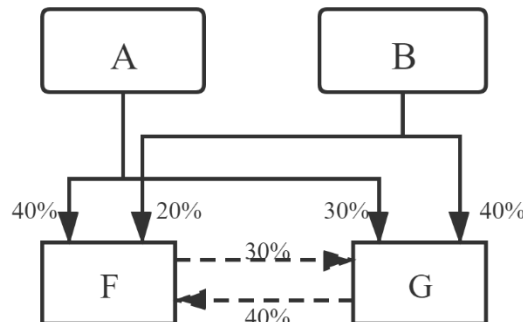
标准差为  $\sigma_3 = \sqrt{\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}} = 3 \sqrt{\frac{N\rho - \rho + 1}{N}}$

与个体经营相比，此时所获期望收益相同，都为 9 万元，

而风险更小  $\left( 3 \sqrt{\frac{N\rho - \rho + 1}{N}} < 3 \right)$ ，故船东们仍应该选择成立股份公司。

当  $N \rightarrow \infty$  时，成立公司的收益仍为 9 万元，此时风险极限值为  $\lim_{N \rightarrow \infty} 3 \sqrt{\frac{N\rho - \rho + 1}{N}} = 3\sqrt{\rho}$

2. 假设股东 A 持有公司 F 和 G 的股份分别为 40% 与 30%，而股东 B 持有公司 F 和 G 的股份分别为 20% 和 40%，同时 F 持有 G 的股份为 30%，G 持有 F 的股份为 40%。
- a. 请画出 A, B, F, G 的持股关系图。



- b. F 持股 G，而同时 G 又持股 F，因此 F, G 之间存在循环持股。此时 A 对 G 的最终持股比例为对 G 的直接持股与通过 F 对 G 间接持股之和；其他最终持股类似。令  $\phi_{AF}$  与  $\phi_{AG}$  为 A 对 F, G 的最终持股比例，请写出  $\phi_{AF}$  与  $\phi_{AG}$  所满足的 2 元线性方程组，并求解其数值。

解：A 对 G 的最终持股比例为对 G 的直接持股与通过 F 对 G 间接持股之和，通过 F 对 G 间接持股即对 F 最终控股比例乘以 F 对 G 控股比例：

$$\begin{cases} \phi_{AG} = 30\% + \phi_{AF} \times 30\% \\ \phi_{AF} = 40\% + \phi_{AG} \times 40\% \end{cases}$$

解得,

$$\phi_{AG} = 47.7272\% \quad \phi_{AF} = 59.0909\%$$

c. 请求解 $\phi_{BF}, \phi_{BG}$ 的数值。

解:

$$\begin{cases} \phi_{BG} = 40\% + \phi_{BF} \times 30\% \\ \phi_{BF} = 20\% + \phi_{BG} \times 40\% \end{cases}$$

解得,

$$\phi_{BG} = 52.2727\% \quad \phi_{BF} = 40.909\%$$

d. 若 $F$ 和 $G$ 自有非股权资产分别为 100 与 200 亿, 请确定 $F, G$ 包含股权资产在内各自的总价值。

解: 设  $FG$  的股权资产分别为  $w_F$ 、 $w_G$ , 那么:

$$\begin{aligned} w_F &= 30\% \times (200 + w_G) \\ w_G &= 40\% \times (100 + w_F) \end{aligned}$$

解得:  $w_F = 81.8181$   $w_G = 72.7272$

所以  $F$ 、 $G$  总价值分别为:  $W_F = 181.8181$   $W_G = 272.7272$

e. 请计算 $A, B$ 各自对 $F, G$ 持股的总价值。

解:  $w_{AG} = \phi_{AG} \times W_G = 130.1651$      $w_{AF} = \phi_{AF} \times W_F = 107.438$

$$w_{BG} = \phi_{BG} \times W_G = 142.5619 \quad w_{BF} = \phi_{BF} \times W_F = 74.38$$

3. 给定一个企业期末产生的自由现金流为常数 $C$ , 只有经理人(企业家)知道 $C$ 的大小, 外部投资人无法核实。经理人知晓企业现金流 $C$ 之后, 首先选择外部投资人无法观察到的在职消费 $P$ , 剩余现金流 $V = C - P$ 是企业通过财务报表等途径让外部投资人观察到的待分配现金流, 也代表了企业的价值。经理人可以从 $V$ 中再获取一部分现金流报酬 $V_I$ , 剩余部分 $V - V_I$ 为企业外部投资人所得到的现金流。

经理人的效用与其所获得的现金流份额 $V_1$ 以及在职消费 $P$ 有关，效用函数为： $U(V_1, P) = V_1 + 2\lambda\sqrt{P}$ ，其中 $\lambda > 0$ 为一个效用参数。

- a. 首先考虑全权益融资的情形。经理人所持有的内部股份比例记为 $\alpha \in [0,1]$ ，外部股份比例为 $1 - \alpha$ 。持股比例决定了期末所得待分配现金流的比例。给定 $\alpha$ ，写出经理人的效用最大化问题并求解。讨论 $\alpha$ 的变动如何影响经理人对 $P$ 的选择，以及如何影响企业价值。让企业价值最大化的 $\alpha$ 是多少？

解：由已知， $\alpha \in [0,1]$ ，那么  $V_1 = \alpha V = \alpha(C - P)$

$$U(V_1, P) = V_1 + 2\lambda\sqrt{P} = \alpha(C - P) + 2\lambda\sqrt{P}$$

所以经理人的效用最大化问题即为求  $U$  的最大值问题：

$$\frac{\partial U}{\partial P} = -\alpha + \frac{\lambda}{\sqrt{P}}$$

令  $\frac{\partial U}{\partial P} = 0$ ，则

$$P = \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2$$

所以随着  $\alpha$  在  $[0,1]$  上增大， $P$  的值减小。

而企业价值  $V = C - P = C - \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2$  随  $\alpha$  的增大而增大

所以，当  $\alpha = 1$  时，企业价值有最大值  $V_{\max} = C - \lambda^2$ 。

- b. 现在考虑债务融资的情形。经理人持股比例 $\alpha = 1$ ，即经理人同为公司股东；企业债务偿付值为 $V_B > 0$ ，需满足 $V_B \leq V = C - P$ ，否则企业债务违约；剩余待分配现金流为股利。写出此时的经理人最优化问题并求解。讨论此时 $P$ 和 $V$ 的大小，并与股权融资的情形进行比较。

解：在此题前提下，经理人的效用为

$$U(V_1, P) = V_1 + 2\lambda\sqrt{P} = (C - P - V_B) + 2\lambda\sqrt{P}$$

所以经理人的效用最大化问题即为求 $U$ 的最大值问题：

$$\frac{\partial U}{\partial P} = -1 + \frac{\lambda}{\sqrt{P}}$$

令  $\frac{\partial U}{\partial P} = 0$ ，则

$$P = \lambda^2$$

$P < \lambda^2$  时， $\frac{\partial U}{\partial P} > 0$ ，效用函数单调递增； $P > \lambda^2$  时， $\frac{\partial U}{\partial P} < 0$ ，效用函数单调递减。

由于  $V_B \leq V = C - P$ ，经理人效用最大化时的  $P$  值及企业价值大小分别为：

$$\begin{aligned} P_a &= \frac{\lambda^2}{\alpha^2} & V_a &= C - \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \\ P_b &= \lambda^2 & V_b &= C - \lambda^2 \end{aligned}$$

易知：

$P_a \geq P_b$  (当且仅当  $\alpha = 1$  且  $\lambda^2 \leq C - V_B$  时取等)

$V_a \leq V_b$  (当且仅当  $\alpha = 1$  且  $\lambda^2 \leq C - V_B$  时取等)

即债务融资与股权融资相比，一般情况下经理人的在职消费  $P$  更大，而企业价值  $V$  更小。

注：同学们可以通过优序融资理论思考本题。

4. 给定你有一周时间完成这份作业，请根据你个人实际情况，确定在这一周之内为完成这次作业所要在不同时间、不同状态（如各种随机状态）下进行的选择，绘制一棵决策树。在决策树基础上，请说明你的最优决策路径。

略