

第 2 次作业

提交日期：4 月 22 日

请重点复习线性代数的相关内容。切忌相互抄袭，数学推导内容的抄袭极易判断。可以相互讨论，甚至全盘“学习”，但请务必自己编写解答。

1. 考虑 n 个风险资产，随机收益率记为列向量 $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)^\top$ ，期望收益率为列向量 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^\top$ ，协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ ， σ_{ii} 表示第 i 个资产收益率的方差。注意 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是对称矩阵，且我们总假设 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是正定矩阵。记资产组合权重向量为 $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)^\top$ ，满足

$$\mathbf{w}^\top \mathbf{1}_n = w_1 + \dots + w_n = 1$$

其中 $\mathbf{1}_n = (1, \dots, 1)^\top$ 表示全为 1 的列向量。资产组合 $R_w = \mathbf{w}^\top \mathbf{R}$ 。故资产组合的期望收益 $\mu_w = \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu}$ ，方差 $\sigma_w^2 = \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}$ 。

- a. 现在考虑给定资产组合期望收益 $\mu_w = \mu_e$ 时，资产组合的方差最小化问题。为推导简便起见，我们把目标函数选为 $\frac{1}{2} \sigma_w^2$ （最小化该目标函数与最小化 σ_w^2 等价），权重向量 \mathbf{w} 需要满足两个约束条件： $\mathbf{w}^\top \mathbf{1}_n = 1$ 和 $\mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} = \mu_e$ 。因此我们把最小化问题写为：

$$\min_{\mathbf{w}} \frac{1}{2} \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{w}^\top \mathbf{1}_n = 1 \text{ 且 } \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} = \mu_e.$$

其中 \mathbf{w} 为选择变量。上述约束最小化问题对应的 Lagrangian 函数（复习或学习高数有关内容）可写为

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} - \lambda (\mathbf{w}^\top \mathbf{1}_n - 1) - \delta (\mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} - \mu_e),$$

其中 λ 为约束 $\mathbf{w}^\top \mathbf{1}_n = 1$ 对应的乘子， δ 为约束 $\mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} = \mu_e$ 对应的乘子。有了 Lagrangian 函数之后，求解约束最小化问题就转化为求解 Lagrangian 函数的极值问题。为此，需要推导 L 关于 \mathbf{w} 的导数。我们使用下列向量记号：

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{w}} = \left(\frac{\partial F}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial w_n} \right)^\top,$$

其中 F 为 n 个变量 $\mathbf{w}^\top = (w_1, \dots, w_n)$ 的函数。

- i. 当 $F = \frac{1}{2} \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}$ 时，请验证 $\partial F / \partial \mathbf{w} = \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}$ 。

注：你可以选择使用“暴力”解法，把 $\mathbf{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}$ 写为求和形式 $\sum_i \sum_j w_i \sigma_{ij} w_j$ ，然后计算其关于 $w_k, k = 1, \dots, n$ 的偏导数。另外一种更简明的办法是定义 $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}$ ， $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^\top$ 为一个列向量，并且每个元素 v_i 都是 \mathbf{w} 的

函数 $v_i(\mathbf{w})$ 。如此一来 $\mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w} = \mathbf{w}^\top \mathbf{v} = w_1 v_1(\mathbf{w}) + \cdots + w_n v_n(\mathbf{w})$, 你只需要验证 (i)

$$\frac{\partial \mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w}}{\partial w_k} = w_1 \frac{\partial v_1}{\partial w_k} + \cdots + w_n \frac{\partial v_n}{\partial w_k} + v_i$$

以及 (ii) 上式等于 $2v_i$ 即可。

ii. 当 $F = \mathbf{w}^\top \mathbf{x}$ 而 \mathbf{x} 为一个常数列向量时, 请验证 $\partial F / \partial \mathbf{w} = \mathbf{x}$ 。

iii. 利用上述结论, 验证 Lagrangian 函数的导数等于:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = \Sigma \mathbf{w} - \lambda \mathbf{1}_n - \delta \boldsymbol{\mu}.$$

b. Lagrangian 函数的极值条件为 $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{0}_n$, 其中 $\mathbf{0}_n$ 表示一个 $n \times 1$ 的零向量。

与最小化问题中的两个约束条件联立, 可以得到如下 $n + 2$ 个联立方程组:

$$\begin{cases} \Sigma \mathbf{w} - \lambda \mathbf{1}_n - \delta \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}_n & (1) \\ \mathbf{w}^\top \mathbf{1}_n = 1 & (2) \\ \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} = \mu_e & (3) \end{cases}$$

而其中的未知量为权重向量 \mathbf{w} (共 n 个未知量) 以及两个乘子 λ 和 δ , 共计 $n + 2$ 个未知量。求解该方程, 可以得到有效组合权重向量 \mathbf{w}_e 。步骤如下:

i. 请证明 (1) 可重写为

$$\lambda \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n + \delta \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{w},$$

即 Σ 为可逆矩阵。

ii. 将上式左乘 $\mathbf{1}_n^\top$, 再将上式左乘 $\boldsymbol{\mu}^\top$, 得到如下形式的线性方程组:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_e \end{bmatrix}, \quad (4)$$

请给出 A, B, C 的表达式, 并说明 $A, C > 0$ 。注: $A, C > 0$ 需要用到 Σ 是正定矩阵这一事实 (正定矩阵的逆矩阵是不是正定矩阵?)。

iii. 求解二元线性方程组 (4), 说明方程的解 λ_e, δ_e 是 μ_e 的线性函数。注: 你可以使用 Cramer 法则求 (4) 中系数矩阵的逆。

iv. 最优权重可以写为 $\mathbf{w}_e = \lambda_e \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n + \delta_e \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu}$ 。据此说明

$$\sigma_e^2 = \mathbf{w}_e^\top \Sigma \mathbf{w}_e = A \lambda_e^2 + 2B \lambda_e \delta_e + C \delta_e^2,$$

其中 A, B, C 为 (4) 式对应的表达式。进一步说明, 给定期望收益率 μ_e 所对应的最小方差组合 $\mathbf{w}_e^\top \mathbf{R}$ 的方差 σ_e^2 是 μ_e 的二次函数:

$$\sigma_e^2 = a \mu_e^2 + b \mu_e + c, \quad (5)$$

二次曲线 (μ_e, σ_e) 就是 n 个资产组合可行集的边界。

c. 请求出 (5) 式中 a, b, c 关于 $\boldsymbol{\mu}, \Sigma$ 等参数的表达式; 并说明 $a > 0$ 。

d. 请说明有效组合 (μ_e, σ_e) 构成双曲线的一支, 并求出其两条渐近线的表达式 (写为 a, b, c 的表示式即可)。

e. 基于 (5) 式, 求出最小方差点 (μ_m, σ_m) 关于 $\boldsymbol{\mu}, \Sigma$ 等参数的表达式 (写为 a, b, c 的表示式即可)。

f. 假设无风险资产利率 $r_f < \mu_m$ 。请计算最优风险资产组合 (μ_*, σ_*) 的表达式（写为 a, b, c 的表示式即可）。注意最优风险资产组合的确定条件： (μ_*, σ_*) 与 $(r_f, 0)$ 连线与有效前沿相切。

g. 请将 (μ_*, σ_*) 表示为 μ, Σ 等初等参数的表达式。

h. 假设投资者的初始财富为 F_0 ，选择无风险资产与风险资产（市场组合）的权重为 $1 - w$ 与 w ，最终获得的财富回报为

$$F_1 = (1 - w)F_0(1 + r_f) + wF_0(1 + R_m) = F_0 + F_0[(1 - w)r_f + wR_m].$$

投资者的最终效用为终端财富 F_1 函数： $U = F_1 - \frac{1}{2}\lambda(F_1 - \mathbb{E}F_1)^2$ ，目标是最大化期望效用。请求解投资者的最优无风险、风险资产配置决策 w^* 。

i. 投资者的最优风险资产配置如何随着 λ 和 r_f 的改变而改变？

j. 若 $r_f > \mu_m$ ，最优风险资产组合是否存在？为什么？

k. 在 CAPM 模型假设下，市场均衡风险资产组合一定是所有市场投资者共同选择的最优风险资产组合 (μ_*, σ_*) ，CAPM 定价公式是该最优组合必然满足的性质。请问当 $\beta_i < 0$ 时，课件 PPT 中的推导，是否依然成立？