武汉大学本科金融工程专业 2021 春季学期公司金融

第 2 次作业参考答案

1. 考虑 n 个风险资产，随机收益率记为列向量 $\boldsymbol{R}=(R_1,\dots,R_n)^\top$，期望收益率为列向量 $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\dots,\mu_n)^\top$，协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}=\left(\sigma_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$，$\sigma_{ii}$ 表示第 i 个资产收益率的方差。注意 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是对称矩阵，且我们总假设 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是正定矩阵。记资产组合权重向量为 $\boldsymbol{w}=(w_1,\dots,w_n)^\top$，满足
$$\boldsymbol{w}^\top\mathbf{1}_n=w_1+\cdots+w_n=1$$
其中 $\mathbf{1}_n=(1,\dots,1)^\top$ 表示全为 1 的列向量。资产组合 $R_w=\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{R}$。故资产组合的期望收益 $\mu_w=\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\mu}$，方差 $\sigma_w^2=\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}$。
   a. 现在考虑给定资产组合期望收益 $\mu_w=\mu_e$ 时，资产组合的方差最小化问题。为推导简便起见，我们把目标函数选为 $\frac{1}{2}\sigma_w^2$（最小化该目标函数与最小化 σ_w^2 等价），权重向量 $\boldsymbol{w}$ 需要满足两个约束条件：$\boldsymbol{w}^\top\mathbf{1}_n=1$ 和 $\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\mu}=\mu_e$。因此我们把最小化问题写为：
$$\min_{\boldsymbol{w}}\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}\quad \text{s.t.}\quad \boldsymbol{w}^\top\mathbf{1}_n=1\text{ 且 }\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\mu}=\mu_e.$$
其中 $\boldsymbol{w}$ 为选择变量。上述约束最小化问题对应的 Lagrangian 函数（复习或学习高数有关内容）可写为
$$L=\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}-\lambda(\boldsymbol{w}^\top\mathbf{1}_n-1)-\delta(\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\mu}-\mu_*),$$
其中 λ 为约束 $\boldsymbol{w}^\top\mathbf{1}_n=1$ 对应的乘子，δ 为约束 $\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\mu}=\mu_e$ 对应的乘子。有了 Lagrangian 函数之后，求解约束最小化问题就转化为求解 Lagrangian 函数的极值问题。为此，需要推导 L 关于 $\boldsymbol{w}$ 的导数。我们使用下列向量记号：
$$\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{w}}=\left(\frac{\partial F}{\partial w_1},\cdots,\frac{\partial F}{\partial w_n}\right)^\top,$$
其中 F 为 n 个变量 $\boldsymbol{w}^\top=(w_1,\dots,w_n)$ 的函数。
      i. 当 $F=\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}$ 时，请验证 $\partial F/\partial\boldsymbol{w}=\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}$。
      注：你可以选择使用“暴力”解法，把 $\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}$ 写为求和形式 $\sum_i\sum_j w_i\sigma_{ij}w_j$，然后计算其关于 $w_k,k=1,\dots,n$ 的偏导数。另外一种更简明的办法是定义 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{v}=(v_1,\dots,v_n)^\top$ 为一个列向量，并且每个元素 v_i 都是 $\boldsymbol{w}$ 的函数 $v_i(\boldsymbol{w})$。如此一来 $\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{v}=w_1v_1(\boldsymbol{w})+\cdots w_nv_n(\boldsymbol{w})$，你只需要验证 (i)
$$\frac{\partial\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}}{\partial w_k}=w_1\frac{\partial v_1}{\partial w_k}+\cdots w_n\frac{\partial v_n}{\partial w_k}+v_i$$
      以及 (ii) 上式等于 $2v_i$ 即可。

解：

令 $v=\Sigma w$， $v=(v_1,\dots,v_n)^\top$， $v_i(w)=\Sigma w_i$

$$w^\top\Sigma w=w^\top v=w_1v_1(w)+\cdots w_nv_n(w)$$

$$\frac{\partial w^\top\Sigma w}{\partial w}=w_1'v_1(w)+w_1\cdot\frac{\partial v_1(w)}{\partial w_1}+w_2'\cdot v_2(w)+$$

$$w_2\cdot\frac{\partial v_2(w)}{\partial w_2}+\dots+w_i'\cdot v_i(w)+w_i\cdot\frac{\partial v_i(w)}{\partial w_i}$$

$$\begin{aligned}&=v_1(w)+v_2(w)+\cdots+v_i(w)+w_1\cdot\Sigma+\mathrm{w}_2\cdot\Sigma+\cdots+\mathrm{w}_i\cdot\Sigma\\&=v_i+v_1(w)+v_2(w)+\cdots+v_i(w)\\&=2v_i\end{aligned}$$

ii. 当 $F=\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{x}$ 而 $\boldsymbol{x}$ 为一个常数列向量时，请验证 $\partial F/\partial\boldsymbol{w}=\boldsymbol{x}$。

解：

$$\begin{aligned}F&=w^Tx\\F&=\mathrm{w}_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n\\\frac{\partial F}{\partial w}&=x_1+x_2+\cdots+x_n\\&=x\end{aligned}$$

iii. 利用上述结论，验证 Lagrangian 函数的导数等于：

$$\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{\Sigma w}-\lambda\boldsymbol{1}_n-\delta\boldsymbol{\mu}.$$

解：

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial w}&=\frac{\partial\frac{1}{2}w^\top\Sigma w}{\partial w}-\lambda\cdot\frac{\partial w^\top1_{\mathrm{n}}}{\partial w}-\delta\cdot\frac{\partial w^\top v}{\partial w}\\&=\Sigma w-\lambda1_n-\delta\mu\end{aligned}$$

b. Lagrangian 函数的极值条件为 $\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{0}_n$，其中 $\boldsymbol{0}_n$ 表示一个 $n\times1$ 的零向量。与最小化问题中的两个约束条件联立，可以得到如下 $n+2$ 个联立方程组：

$$\begin{cases}\boldsymbol{\Sigma w}-\lambda\boldsymbol{1}_n-\delta\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{0}_n & (1)\\ \boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{1}_n=1 & (2)\\ \boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\mu}=\mu_e & (3)\end{cases}$$

而其中的未知量为权重向量 $\boldsymbol{w}$（共 n 个未知量）以及两个乘子 λ 和 δ，共计 $n+2$ 个未知量。求解该方程，可以得到有效组合权重向量 $\boldsymbol{w}_e$。步骤如下：

i. 请证明 (1) 可重写为

$$\lambda\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{1}_n+\delta\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{w},$$

即 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为可逆矩阵。

解：(1)可写为 $\boldsymbol{\Sigma w} = \lambda \mathbf{1}_n + \delta \boldsymbol{\mu}$, 两边乘以 Σ^{-1} 得到上式。

ii. 将上式左乘 $\mathbf{1}_n^\top$，再将上式左乘 $\boldsymbol{\mu}^\top$，得到如下形式的线性方程组：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_e \end{bmatrix}, \tag{4}$$

请给出 A, B, C 的表达式，并说明 $A, C > 0$。注：$A, C > 0$ 需要用到 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是正定矩阵这一事实（正定矩阵的逆矩阵是不是正定矩阵？）。

解：方程左乘1_n^T得到（常数与矩阵乘积可交换位置）

$$\lambda \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n + \delta \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{w} = 1$$

故 $A = \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n$, $B = \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$。左乘 $\boldsymbol{\mu}^\top$ 可得

$$\lambda \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n + \delta \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{w} = \mu_e$$

上两式整理可得（4)，其中

$$A = \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n \quad B = \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n \quad C = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$$

由于 Σ 是正定矩阵，所以 Σ^{-1} 也是正定矩阵，由此知 $A, C > 0$ 。

iii. 求解二元线性方程组 (4)，说明方程的解 λ_e, δ_e 是 μ_e 的线性函数。注：你可以使用 Cramer 法则求 (4) 中系数矩阵的逆。

解：对 (4) 的系数矩阵求逆可得

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{AC - B^2}\begin{bmatrix} C & -B \\ -B & A \end{bmatrix}$$

故

$$\lambda_e = \frac{C - B\mu_e}{AC - B^2} \ \delta_e = \frac{A\mu_e - B}{AC - B^2}$$

iv. 最优权重可以写为 $\boldsymbol{w}_e = \lambda_e \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n + \delta_e \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$。据此说明

$$\sigma_e^2 = \boldsymbol{w}_e^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w}_e = A\lambda_e^2 + 2B\lambda_e\delta_e + C\delta_e^2,$$

其中 A, B, C 为 (4) 式对应的表达式。进一步说明，给定期望收益率 μ_e 所对应的最小方差组合 $\boldsymbol{w}_e^\top \boldsymbol{R}$ 的方差 σ_e^2 是 μ_e 的二次函数：

$$\sigma_e^2 = a\mu_e^2 + b\mu_e + c, \tag{5}$$

二次曲线 (μ_e, σ_e) 就是 n 个资产组合可行集的边界。

解：由 $\boldsymbol{w_e} = \lambda_e \boldsymbol{\Sigma}^{-1} 1_n + \delta_e \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mu$ 可知

$$
\begin{aligned}
\sigma_e^2 \quad &= \boldsymbol{w}_{\mathbf{e}}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w}_{\mathbf{e}} = (\lambda_e \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}} \mathbf{1}_n + \delta_e \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma} (\lambda_e \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}} \mathbf{1}_n + \delta_e \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{\mu}) \\
&= (\lambda_e \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}} + \delta_e \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}}) \boldsymbol{\Sigma} (\lambda_e \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}} \mathbf{1}_n + \delta_e \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{\mu}) \\
&= \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}} \mathbf{1}_n \lambda_e^2 + 2 \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{\mu} \lambda_e \delta_e + \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{\mu} \delta_e^2 \\
&= A\lambda_e^2 + 2B\lambda_e\delta_e + C\delta_e^2
\end{aligned}
$$

将 A, B, C 的表达式代入上式可知

$$
\sigma_e^2 = \frac{A\mu_e^2 - 2B\mu_e + C}{AC - B^2} = a\mu_e^2 + b\mu_e + c
$$

c. 请求出 (5) 式中 a, b, c 关于 $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$ 等参数的表达式；并说明 $a > 0$。

解：由上问可知

$$
a = \frac{A}{AC - B^2},\ b = \frac{-2B}{AC - B^2},\ c = \frac{C}{AC - B^2}
$$

$$
\text{且 } A = \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}} \mathbf{1}_n \ B = \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} \ C = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}
$$

因此

$$
a = \frac{A}{AC - B^2} = \frac{\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}} \mathbf{1}_n}{\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}} \mathbf{1}_n \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{\mu} - (\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{\mu})^2}
$$

$$
b = \frac{-2B}{AC - B^2} = \frac{-2 \cdot \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}} \mathbf{1}_n \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{\mu} - (\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{\mu})^2}
$$

$$
c = \frac{C}{AC - B^2} = \frac{\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}} \mathbf{1}_n \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{\mu} - (\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{\mu})^2}
$$

为说明 $a > 0$, 只需说明 $\Delta = AC - B^2 > 0$ 。首先注意到

$$
\Delta = \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}} \mathbf{1}_n \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{\mu}_n + \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{\mu} \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{\mu}
$$

对正定矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ 可以定义 $\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}$ 如下: 考虑 $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ 的特征值分解

$$
\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \mathbf{H} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{H}^\top \ \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}
$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 对角线上为 Σ^{-1} 的 n 个特征值, 且 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$; $\mathbf{H}$ 为正交矩阵， 满足 $\mathbf{H}^\top = \mathbf{H}^{-1}$ 。由于 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$, 故可定义

$$
\Lambda^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}
$$

并进一步定义 $\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} = \mathbf{H} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \mathbf{H}^\top$ 。计算可知

$$
\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} = \mathbf{H} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \mathbf{H}^\top \mathbf{H} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \mathbf{H}^\top = \mathbf{H} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \mathbf{H}^\top = \mathbf{H} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{H}^\top = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}.
$$

由此，令 $\mathbf{x} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} \mathbf{1}_n, \mathbf{y} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} \boldsymbol{\mu}$, 则

$$
\Delta = (\mathbf{x}^\top \mathbf{x})(\mathbf{y}^\top \mathbf{y}) - (\mathbf{x}^\top \mathbf{y})^2.
$$

如此，可用 Cauchy-Schwartz 不等式说明 $\Delta > 0$ 。

d. 请说明有效组合 (μ_e, σ_e) 构成双曲线的一支，并求出其两条渐近线的表达式（写为a, b, c的表示式即可）。

解：由 (5) 可知

$$\sigma_e^2 = a\mu_e^2 + b\mu_e + c = a\left(\mu_e + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

上式可改写为

$$\frac{\sigma_e^2}{c - \frac{b^2}{4a}} - \frac{\left(\mu_e + \frac{b}{2a}\right)^2}{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}} = 1$$

由于，$\sigma_e \geq 0$，因此，使上式成立的(μ_e, σ_e)构成双曲线的一支。根据双曲线渐近线公式，即 $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$的渐近线为 $\mathrm{y} = \pm\frac{\beta}{\alpha}x$，渐近线为：

$$\mu_e + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4a}}}\sigma_e$$

整理得

$$\mu_e = \pm\frac{1}{\sqrt{a}}\sigma_e - \frac{b}{2a}$$

e. 基于 (5) 式，求出最小方差点 (μ_m, σ_m) 关于 $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$ 等参数的表达式（写为a, b, c的表示式即可）。

解：由上问得：

$$\sigma_e^2 = a\mu_e^2 + b\mu_e + c = a\left(\mu_e + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

当σ_e最小时，$\mu_e = -\frac{b}{2a}$,

因此：$\mu_m = -\frac{b}{2a}$, $\sigma_m = \sqrt{c - \frac{b^2}{4a}}$

代入

$$a = \frac{A}{AC - B^2}, b = \frac{-2B}{AC - B^2}, c = \frac{C}{AC - B^2}$$

以及$A = \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n$, $B = \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$, $C = \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$

可得

$$\mu_m = \frac{B}{A} = \frac{1_n^\top \Sigma^{-1}\mu}{1_n^\top \Sigma^{-1} 1_n} \ \sigma_m = \sqrt{\frac{1}{A}} = \sqrt{\frac{1}{1_n^\top \Sigma^{-1} 1_n}}$$

即最小方差点为

$$(\mu_m, \sigma_m) = \left(\frac{1_n^\top \Sigma^{-1}\mu}{1_n^\top \Sigma^{-1} 1_n}, \sqrt{\frac{1}{1_n^\top \Sigma^{-1} 1_n}} \right)$$

f. 假设无风险资产利率 $r_f < \mu_m$。请计算最优风险资产组合 (μ_*, σ_*) 的表达式（写为a, b, c的表示式即可）。注意最优风险资产组合的确定条件：(μ_*, σ_*) 与 $(r_f, 0)$ 连线与有效前沿相切。

解： 在式 $\sigma^2 = a\mu^2 + b\mu + c$ 中，对σ求导得

$$2\sigma = 2a\mu \frac{d\mu}{d\sigma} + b\frac{d\mu}{d\sigma} = (2a\mu + b)\frac{d\mu}{d\sigma}$$

所以有

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = \frac{2\sigma}{2a\mu + b}$$

根据上式，在切点(μ_*, σ_*), 有

$$\frac{\mu_* - r_f}{\sigma_*} = \frac{2\sigma_*}{2a\mu_* + b}$$

上式与 $\sigma_*^2 = a\mu_*^2 + b\mu_* + c$ 联立可得

$$\mu_* = -\frac{2c + br_f}{b + 2ar_f}$$

$$\sigma_* = \sqrt{a\mu_*^2 + b\mu_* + c}$$

即为最优风险资产组合 (μ_*, σ_*) 的表达式

g. 请将 (μ_*, σ_*) 表示为 $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$ 等初等参数的表达式。

解： 将

$$a = \frac{\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n}{\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - (\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu})^2}$$

$$b = \frac{-2 \cdot \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - (\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu})^2}$$

$$c = \frac{\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - (\mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu})^2}$$

代入上式即可。

h. 假设投资者的初始财富为F_0，选择无风险资产与风险资产（市场组合）的权重为 $1-w$ 与 w，最终获得的财富回报为

$$F_1=(1-w)F_0\left(1+r_f\right)+wF_0(1+R_m)=F_0+F_0\left[(1-w)r_f+wR_m\right].$$

投资者的最终效用为终端财富 F_1 函数：$U=F_1-\frac{1}{2}\lambda(F_1-\mathbb{E}F_1)^2$，目标是最大化期望效用。请求解投资者的最优无风险、风险资产配置决策 w^*。

解：

$$F_1=(1-w)F_0\left(1+r_f\right)+wF_0(1+R_m)=F_0+F_0\left[(1-w)r_f+wR_m\right]$$

$$\max_w \mathrm{U}=F_1-\frac{1}{2}\lambda(F_1-\mathbb{E}F_1)^2$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}U&=F_0\left[1+(1-w)r_f+w\mu_m\right]-\frac{1}{2}\lambda(F_1-\mathbb{E}F_1)^2\\&=F_0\left[1+(1-w)r_f+w\mu_m\right]-\frac{1}{2}\lambda\sigma_{F_1}^2\\&=F_0\left[1+(1-w)r_f+w\mu_m\right]-\frac{1}{2}\lambda F_0^2w^2\sigma_m^2\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\mathbb{E}U}{\partial w}=F_0\left(\mu_m-r_f\right)-\ \lambda F_0^2\sigma_m^2w=0$$

解之得，$w^*=\frac{\mu_m-r_f}{\lambda\mathrm{F}_0\sigma_m^2}$

i. 投资者的最优风险资产配置如何随着 λ 和 r_f 的改变而改变？

答：根据上问结果可得，λ与r_f变大时，w^*变小，无风险资产权重增加，风险资产权重变小。

j. 若$r_f>\mu_m$，最优风险资产组合是否存在？为什么？

答：由之前最优风险组合求解可知，最优风险组合是和有效前沿相切时得到的组合(μ_*,σ_*),但当$r_f>\mu_m$时，将无法得到切点，故不存在最优风险组合。

k. 在 CAPM 模型假设下，市场均衡风险资产组合一定是所有市场投资者共同选择的最优风险资产组合(μ_*,σ_*)，CAPM 定价公式是该最优组合必然满足的性质。请问当$\beta_i<0$时，课件 PPT 中的推导，是否依然成立？

答：当$\beta<0$时,课件中的$CAPM$的推导（即满足均值-方差有效）仍然成立，正β资产对组合风险贡献为正但可以获得正的超额收益，持有负β资产相当于提供了一个保险（即对组合风险贡献为负），持有者愿意为其付出一定的收益代价，总而言之仍然体现为持有者在收益和风险之间进行权衡。