第六讲：

资产定价模型

武汉大学本科金融工程专业2021春公司金融

授课人：刘岩

本讲内容

- 资产组合理论
- 资本资产定价模型
- 套利定价模型
- BDM 第 10-11 章，RWJ 第 11-12 章

收益率的概率特征

- 每一个资产的收益率都在随时间变动，而且这种变动是事前不确定的(ex ante uncertain)
- 收益率的这种特征可以通过随机变量(random variable)来描述
- 假设一个资产的收益率可以用随机变量 R 来表示（注意区分随机变量和随机变量的特定实现值），R 的取值范围为 $[-1,\infty)$，具有分布函数 $F(\cdot)$
- R 的所有概率特征都由 F 所反映：如期望 $\mathbb{E}R$，方差 $\mathrm{var}(R)=\mathbb{E}[R-\mathbb{E}R]^2=\mathbb{E}[R^2]-(\mathbb{E}R)^2$，标准差

$$\sigma_R=\sqrt{\mathrm{var}(R)}$$

多个资产收益率的相关性

- 在最简单的情形，考虑两个资产 A 和 B，随机收益率分别为 R_A 和 R_B
- 两个资产收益率的协方差：

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(R_A, R_B) &= \mathbb{E}[(R_A - \mathbb{E}R_A)(R_B - \mathbb{E}R_B)] \\ &= \mathbb{E}[R_A R_B] - \mathbb{E}R_A \mathbb{E}R_B\end{aligned}$$

- 两个资产收益率的相关系数：

$$\rho_{AB} = \frac{\mathrm{cov}(R_A, R_B)}{\sigma_A \sigma_B} = \frac{\mathrm{cov}(R_A, R_B)}{\sqrt{\mathrm{var}(R_A)\mathrm{var}(R_B)}}$$

其中 σ_A, σ_B 分别表示 R_A, R_B 的标准差

期望的线性性

- 对于任意的随机变量 X, Y 和任意的实数 $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$
2. $\mathbb{E}[\alpha X] = \alpha \mathbb{E}X$

- 利用线性性进行运算

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)] \\
&= \mathbb{E}[XY - X\mathbb{E}Y - Y\mathbb{E}X + \mathbb{E}X\mathbb{E}Y] \\
&= \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y - \mathbb{E}Y\mathbb{E}X + \mathbb{E}X\mathbb{E}Y \\
&= \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y
\end{aligned}
$$

- 性质：$|\rho(X,Y)| \le 1$，可通过Cauchy-Schwartz不等式证明

期望的线性性

- $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(X - \mathbb{E}X)] = \mathrm{cov}(X, X)$
- 随机变量线性组合的方差：
$$\mathrm{var}(\alpha X + \beta Y) = \mathrm{cov}(\alpha X + \beta Y, \alpha X + \beta Y)$$
- 协方差的对称双线性性
  1. $\mathrm{cov}(X + Y, Z) = \mathrm{cov}(X, Z) + \mathrm{cov}(Y, Z)$
  2. $\mathrm{cov}(\alpha X, Z) = \alpha \mathrm{cov}(X, Z)$
  3. $\mathrm{cov}(X, Z) = \mathrm{cov}(Z, X)$
- $\mathrm{cov}(\alpha X + \beta Y, \alpha X + \beta Y) = \alpha \mathrm{cov}(X, \alpha X + \beta Y) + \beta \mathrm{cov}(Y, \alpha X + \beta Y) = \alpha^2 \mathrm{var}(X) + 2\alpha\beta \mathrm{cov}(X, Y) + \beta^2 \mathrm{var}(Y)$

资产组合的收益率：两个资产情形

- 容易验证，w_A 单位 A 和 w_B 单位 B 构成的资产组合(asset portfolio)的收益率为 $w_A R_A + w_B R_B$
- 由期望的线性性可知：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[w_A R_A + w_B R_B] &= w_A \mathbb{E}[R_A] + w_B \mathbb{E}[R_B] \\
\mathrm{var}(w_A R_A + w_B R_B) &= w_A^2 \mathrm{var}(R_A) + w_B^2 \mathrm{var}(R_B) \\
&\quad +2 w_A w_B \mathrm{cov}(R_A, R_B) \\
&= w_A^2 \mathrm{var}(R_A) + w_B^2 \mathrm{var}(R_B) \\
&\quad +2 w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}
\end{aligned}
$$

- 当 $\rho_{AB} \neq 1$ 时，其资产组合的<u>标准差</u>（风险）小于两个资产分别的<u>标准差之和</u>；此时两个资产可以相互**对冲**(hedge)彼此的风险

资产收益率之间的对冲

- 如果 $\rho_{AB} < 1$，则有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{var}(w_A R_A + w_B R_B) \\
&= w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 w_A w_B \rho_{AB} \sigma_A \sigma_B \\
&\leq w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 |w_A w_B \rho_{AB} \sigma_A \sigma_B| \\
&\leq w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 |w_A w_B \sigma_A \sigma_B| \cdot |\rho_{AB}| \\
&< w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 |w_A w_B \sigma_A \sigma_B| \\
&= (w_A \sigma_A + w_B \sigma_B)^2
\end{aligned}
$$

- 资产组合的标准差

$$
\sigma_w = \sqrt{\mathrm{var}(w_A R_A + w_B R_B)} < w_A \sigma_A + w_B \sigma_B
$$

资产组合的收益率：一般情形

- 考虑 n 个资产 R_i，每个资产在资产组合中的份额为 w_i，$i = 1, \ldots, n$
- 用黑体字母 $\boldsymbol{R} = [R_1, \ldots, R_n]'$ 表示收益率随机（列）向量，$\boldsymbol{w} = [w_1, \ldots, w_n]'$ 表示份额（列）向量，则资产组合可以表示为向量（矩阵）乘积 $\boldsymbol{w}'\boldsymbol{R}$
- $\boldsymbol{R}$ 期望记为 $\boldsymbol{\mu}$：

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}R_1 \\ \vdots \\ \mathbb{E}R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}.$$

- 资产组合收益率的期望为

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{w}'\boldsymbol{R}] = \boldsymbol{w}'\mathbb{E}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{w}'\boldsymbol{\mu}.$$

资产组合期望收益率

- 资产组合收益率

$$R_w = w_1 R_1 + \cdots + w_n R_n = \boldsymbol{w}'\boldsymbol{R}$$

- 资产组合收益率的期望

$$\mathbb{E}R_w = w_1 \mathbb{E}R_1 + \cdots w_n \mathbb{E}R_n = \boldsymbol{w}'\mathbb{E}\boldsymbol{R}$$

收益率向量的协方差矩阵

- 随机收益率向量 $\boldsymbol{R}$ 的**<u>协方差矩阵</u>**定义为：

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\operatorname{cov}(R_1,R_1) & \cdots & \operatorname{cov}(R_1,R_n)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \operatorname{cov}(R_n,R_1) & \cdots & \operatorname{cov}(R_n,R_n)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\mathbb{E}(R_1-\mu_1)(R_1-\mu_1) & \cdots & \mathbb{E}(R_1-\mu_1)(R_n-\mu_n)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \mathbb{E}(R_n-\mu_n)(R_1-\mu_1) & \cdots & \mathbb{E}(R_n-\mu_n)(R_n-\mu_n)\end{bmatrix}$$

资产组合的方差：一般情形

- 随机向量 $\boldsymbol{R}$ 的协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 也可以表示为：
$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{E}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})'.$$
- 资产组合收益率的方差 σ_w^2 为
$$\begin{aligned}\mathrm{var}(\boldsymbol{w}'\boldsymbol{R}) &= \mathbb{E}(\boldsymbol{w}'\boldsymbol{R}-\boldsymbol{w}'\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{w}'\boldsymbol{R}-\boldsymbol{w}'\boldsymbol{\mu}) \\ &= \mathbb{E}[\boldsymbol{w}'(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{w}] \\ &= \boldsymbol{w}'\mathbb{E}[(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})']\boldsymbol{w} \\ &= \boldsymbol{w}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}.\end{aligned}$$
- 因此，资产组合收益率的方差 σ_w^2 为权重向量 $\boldsymbol{w}$ 的一个**二次型函数**

协方差矩阵的矩阵表达式

- 收益率向量 $\boldsymbol{R}$ 的协方差矩阵为 $\mathbb{E}[(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})']$
- 首先，$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})$ 为离差向量，并且

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})'$$

$$=\begin{bmatrix} R_1-\mu_1 \\ \vdots \\ R_n-\mu_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_1-\mu_1 & \cdots & R_n-\mu_n \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (R_1-\mu_1)(R_1-\mu_1) & \cdots & (R_1-\mu_1)(R_n-\mu_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (R_n-\mu_n)(R_1-\mu_1) & \cdots & (R_n-\mu_n)(R_n-\mu_n) \end{bmatrix}$$

- 故，$\mathbb{E}[(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\mu})'] = \boldsymbol{\Sigma}$

资产组合的可行集：两个资产情形

- 假设投资者有￥1，要投资在两种资产 A 和 B 上，分别为 $w_A = w, w_B = 1 - w$
- 这个资产组合 R_w 的期望收益率为
$$\mu_w = \mathbb{E}R_w = w\mathbb{E}[R_A] + (1-w)\mathbb{E}[R_B]$$
- R_w 的方差 σ_w^2 为
$$\text{var}(R_w) = w^2\sigma_A^2 + (1-w)^2\sigma_B^2 + 2w(1-w)\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B$$
- 可以注意到，当 w 变动时， μ_w 和 σ_w^2 都在变动更进一步的，我们可以把 w 表示为 μ_w 的线性函数，从而把 σ_w^2 表示为 $\mathbb{E}R_w$ 的二次函数
- 如此得到的 μ_w 与σ_w^2或 σ_w 间的关系称为资产组合的可行集(feasible set)

资产组合的收益与风险

- 由 $\mu_w = w\mu_A + (1-w)\mu_B$，因此

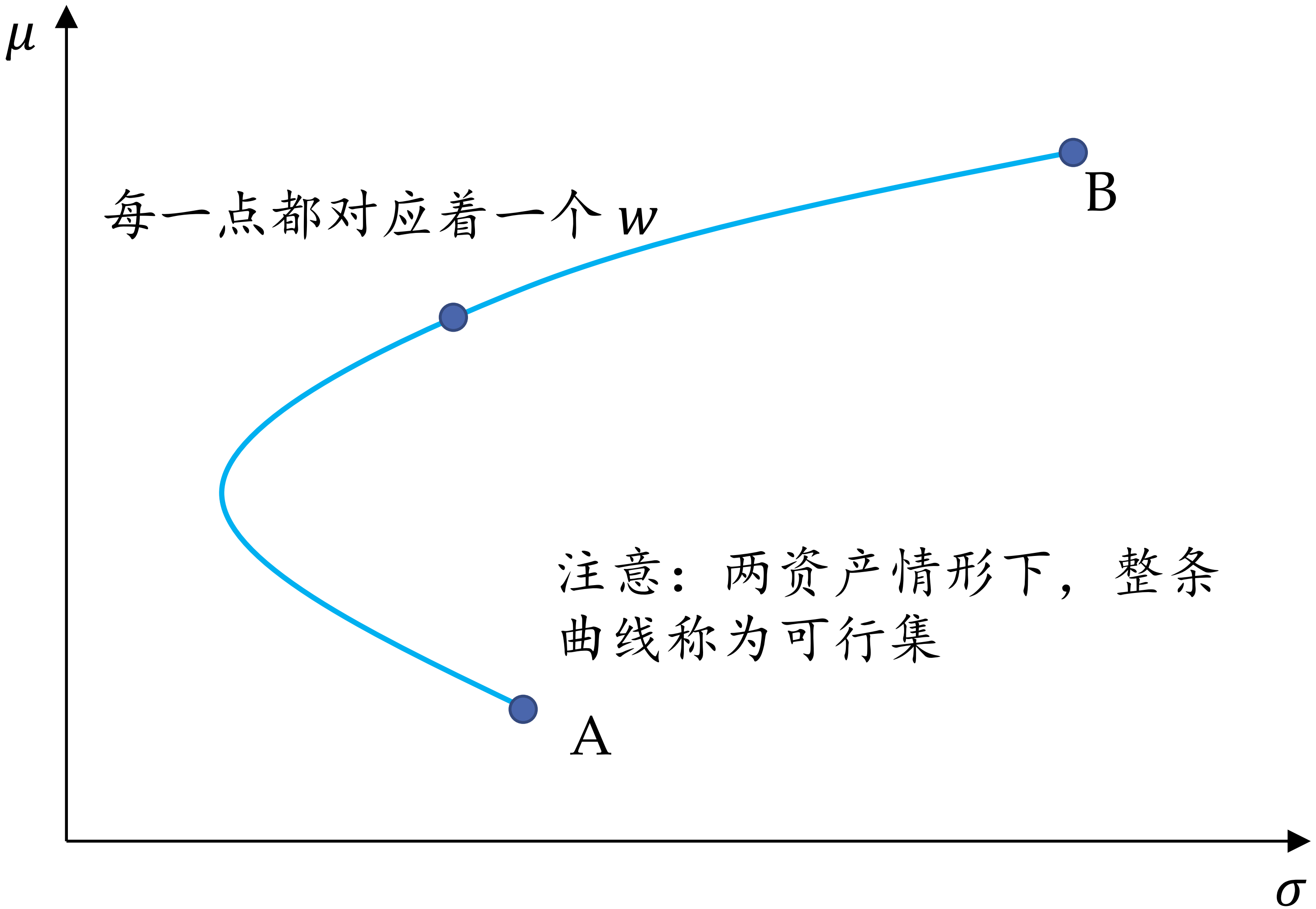
$$w = \frac{\mu_w - \mu_B}{\mu_A - \mu_B}$$

- 资产组合的方差 σ_w^2 可写为

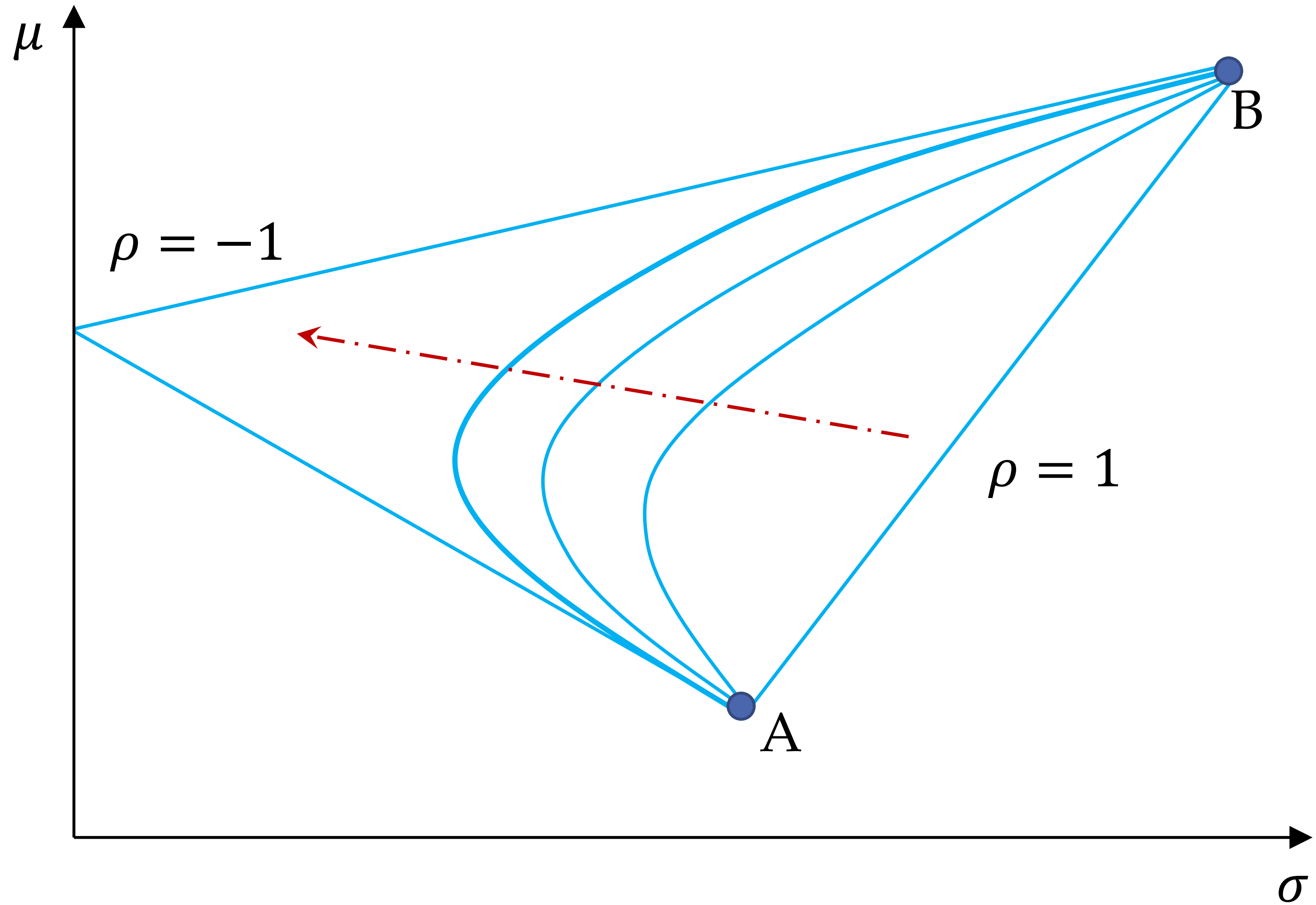
$$\begin{aligned}
&w^2\sigma_A^2 + (1-w)^2\sigma_B^2 + 2w(1-w)\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B \\
&= \sigma_A^2 w^2 + \sigma_B^2(1-2w+w^2) + 2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B(w-w^2) \\
&= (\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B)w^2 - 2(\sigma_B^2 - \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B)w + \sigma_B^2
\end{aligned}$$

- σ_w^2 是 w 的一个2-次函数；若将 $w = \frac{1}{\mu_A-\mu_B}\mu_w - \frac{\mu_B}{\mu_A-\mu_B}$ 代入，则 σ_w^2 为 μ_w 的 2-次函数

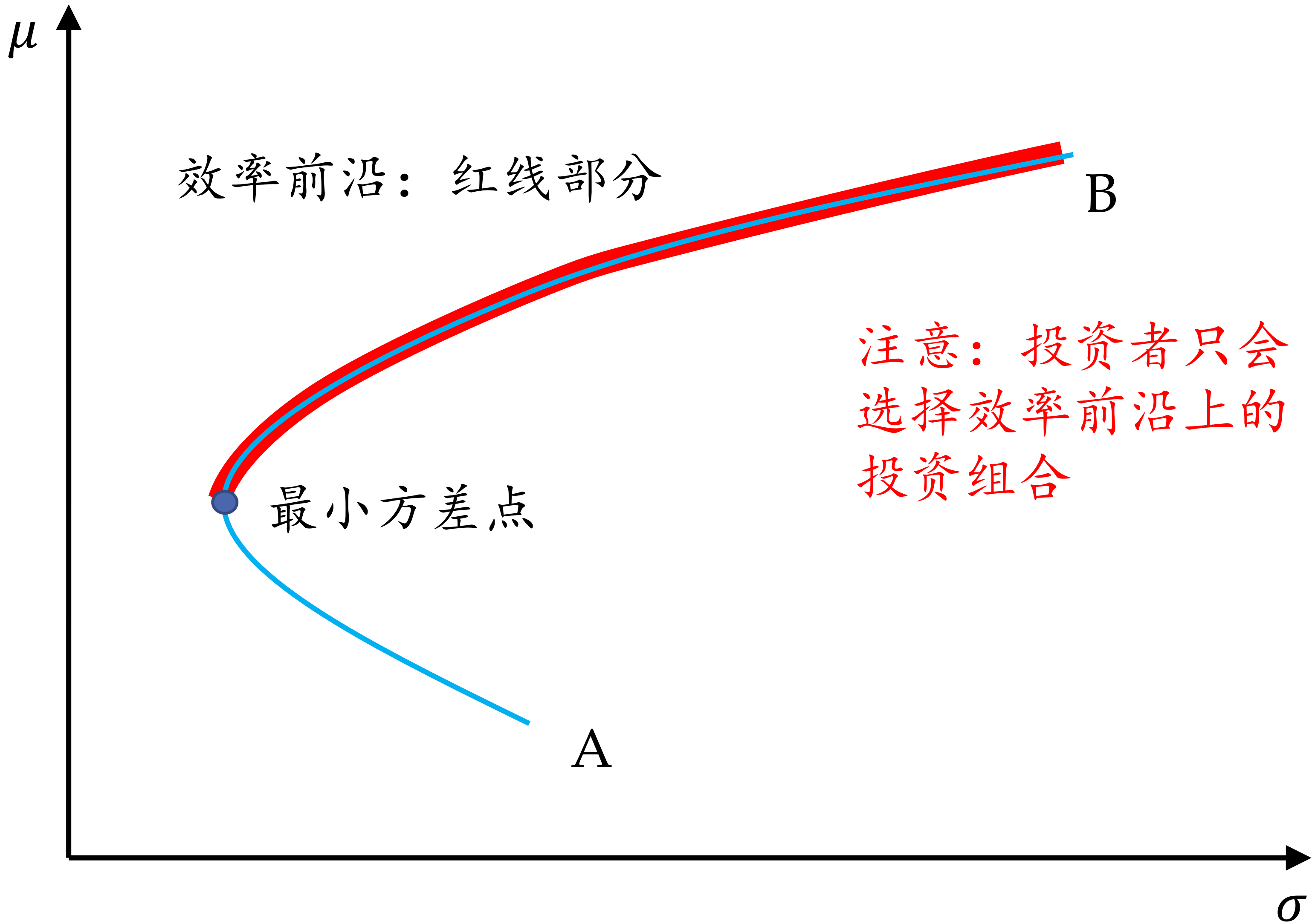
两资产组合示意



组合边界随相关系数的变动



两资产最小方差组合示例

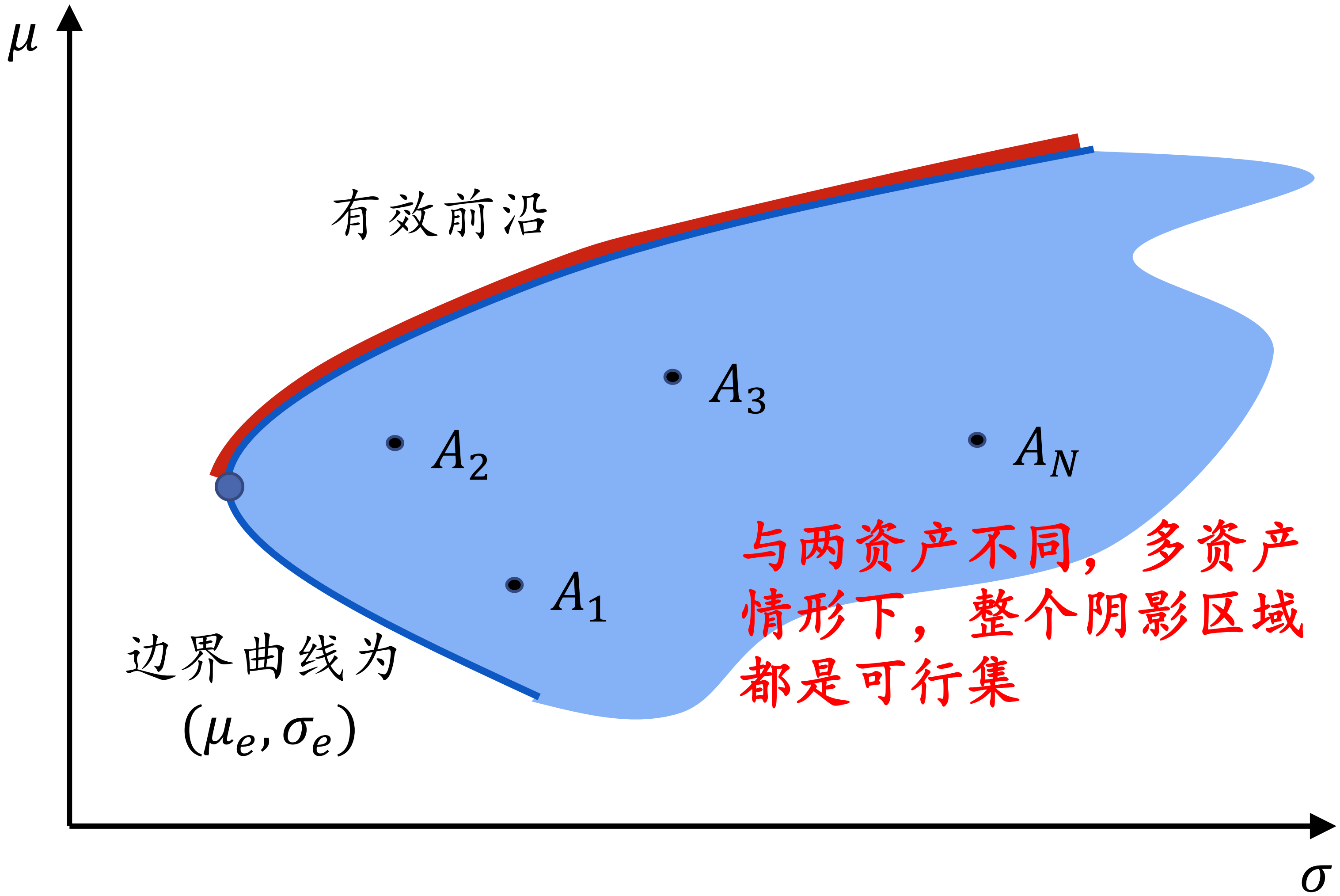


注意：投资者只会选择效率前沿上的投资组合

资产组合有效边界：一般情形

- 当资产数目 $n \geq 3$ 时，资产组合的期望收益-风险关系可以通过求解下列最优化问题得到：
$$\sigma_e^2 = \min_{\boldsymbol{w}} \mathrm{var}(\boldsymbol{w}'\boldsymbol{R}) = \min_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{w}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}$$
$$s.t.\ \boldsymbol{w}'\mathbb{E}\boldsymbol{R} = \mu_e \text{ 且 } \boldsymbol{w}'\boldsymbol{1} = 1$$
其中 $\boldsymbol{1}$ 表示每个位置取 1 的列向量以 $\boldsymbol{w}_e$ 表示上述问题的最优解
- 当资产组合 $\boldsymbol{w}_e'\boldsymbol{R}$ 的期望收益 μ_e 变化时，资产组合的标准差 σ_e 也会相应变化，从而可以再次得到 (μ_e, σ_e) 组合界定的可行集特别的，σ_e 关于 μ_e 下凸
- 在方差最小点（对所有期望收益 μ_e 而言）之上的可行集边界称为有效前沿

多资产组合



μ
有效前沿
A_3
A_2
A_N
与两资产不同，多资产情形下，整个阴影区域都是可行集
A_1
边界曲线为 (μ_e, σ_e)
σ

资产组合的本质

- 每一个资产的收益率都可以看做是两部分构成：

$$R_i = \underbrace{\mathbb{E}R_i}_{\text{期望收益率}} + \underbrace{U_i}_{\text{随机扰动}}$$

其中未预期随机扰动满足 $\mathbb{E}U_i = 0$

- 未预期部分可以进一步分解：$U_i = m + \epsilon_i$，其中 m 代表系统风险，为所有资产所共有；而 ϵ_i 代表资产 i 的个体异质性风险，互相独立且与 m 无关

- 资产组合可以消除异质性风险：例如 $w_i = 1/n$ 时，可以说明 $\text{var}(\boldsymbol{w}'\boldsymbol{R}) \to \sigma_m^2$，当 $n \to \infty$；而单个资产的方差为 $\sigma_m^2 + \sigma_\epsilon^2$

无风险借贷与资产组合

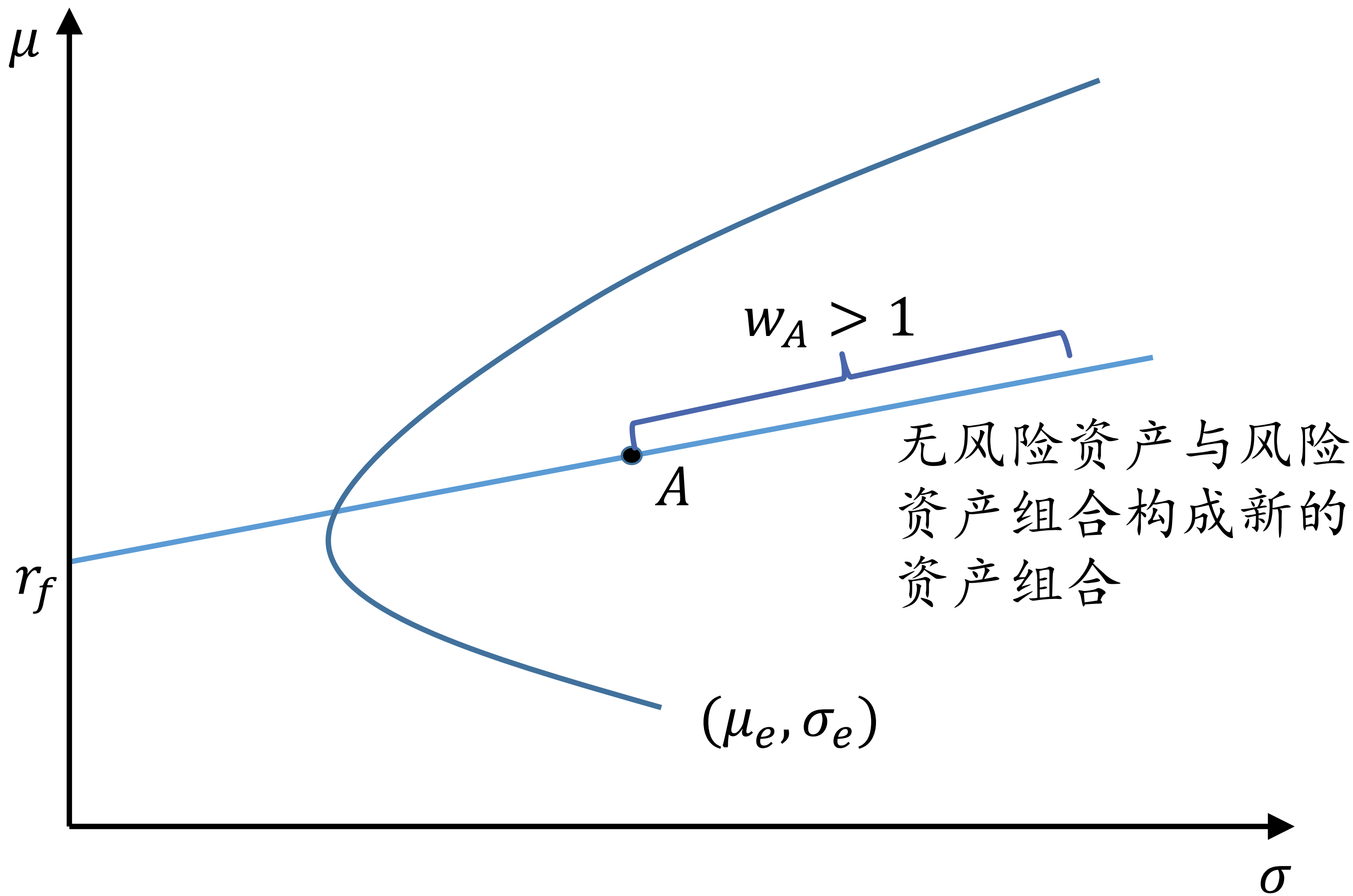
- 现在考虑一个无风险资产和一个有风险资产的组合，前者的收益率为 R_f 而后者的收益率为 R_A
- 继续考虑持有 w_A 份的风险资产和 $1-w_A$ 份的无风险资产，则此组合的预期收益率及风险为

$$\mathbb{E}R_w = w_A \mathbb{E}R_A + (1-w_A)R_f$$

$$\sigma_w = w_A \sigma_A$$

- 显然可见，若风险资产的预期收益率 $\mathbb{E}R_A$ 高于 R_f，那么资产组合的预期收益总是随风险的上升而上升
- 当 $w_A \geq 1$ 时，$1-w_A \leq 0$，表示投资人在借钱购买风险资产（杠杆投资）

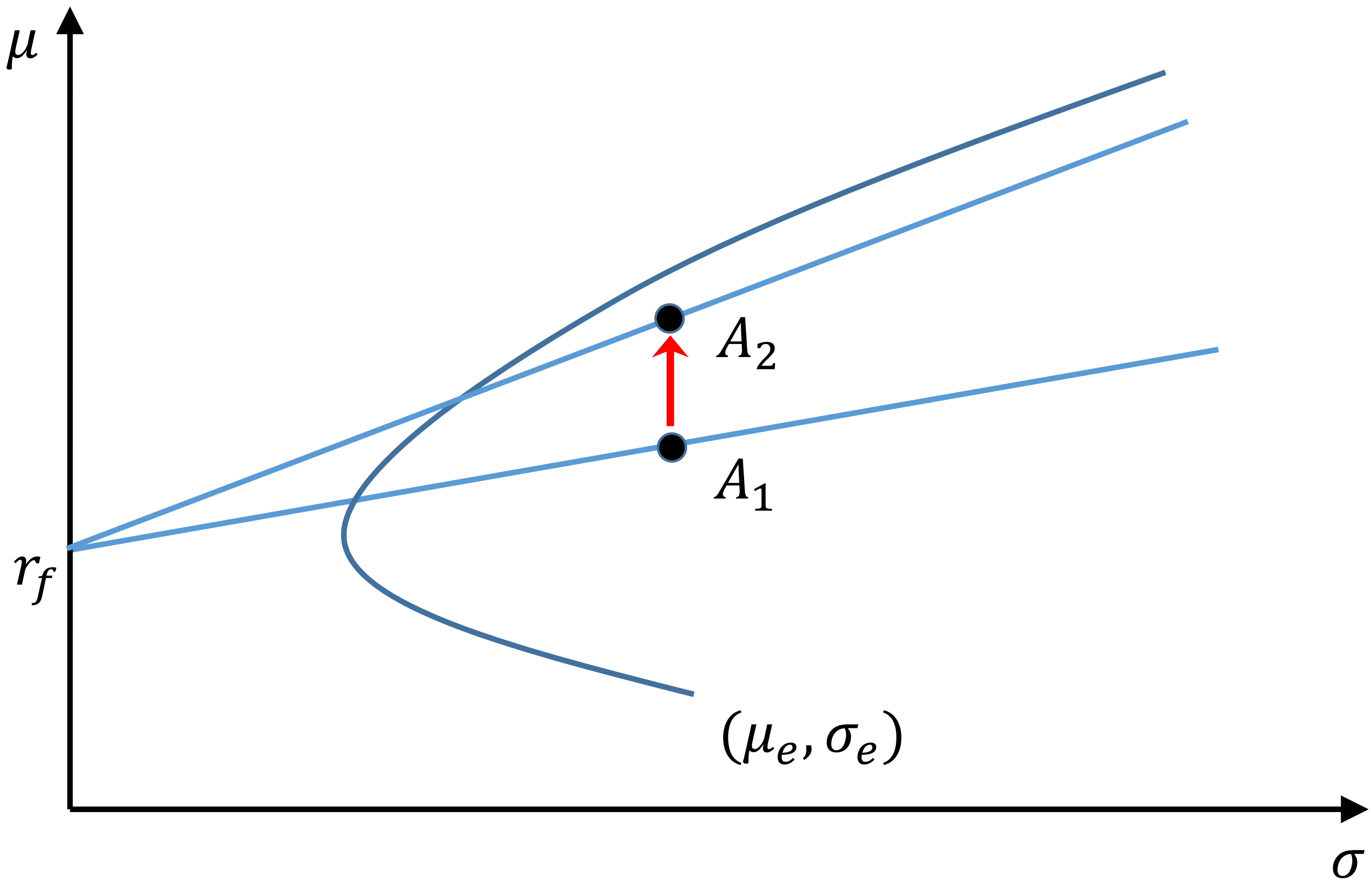
无风险资产与风险资产组合示意



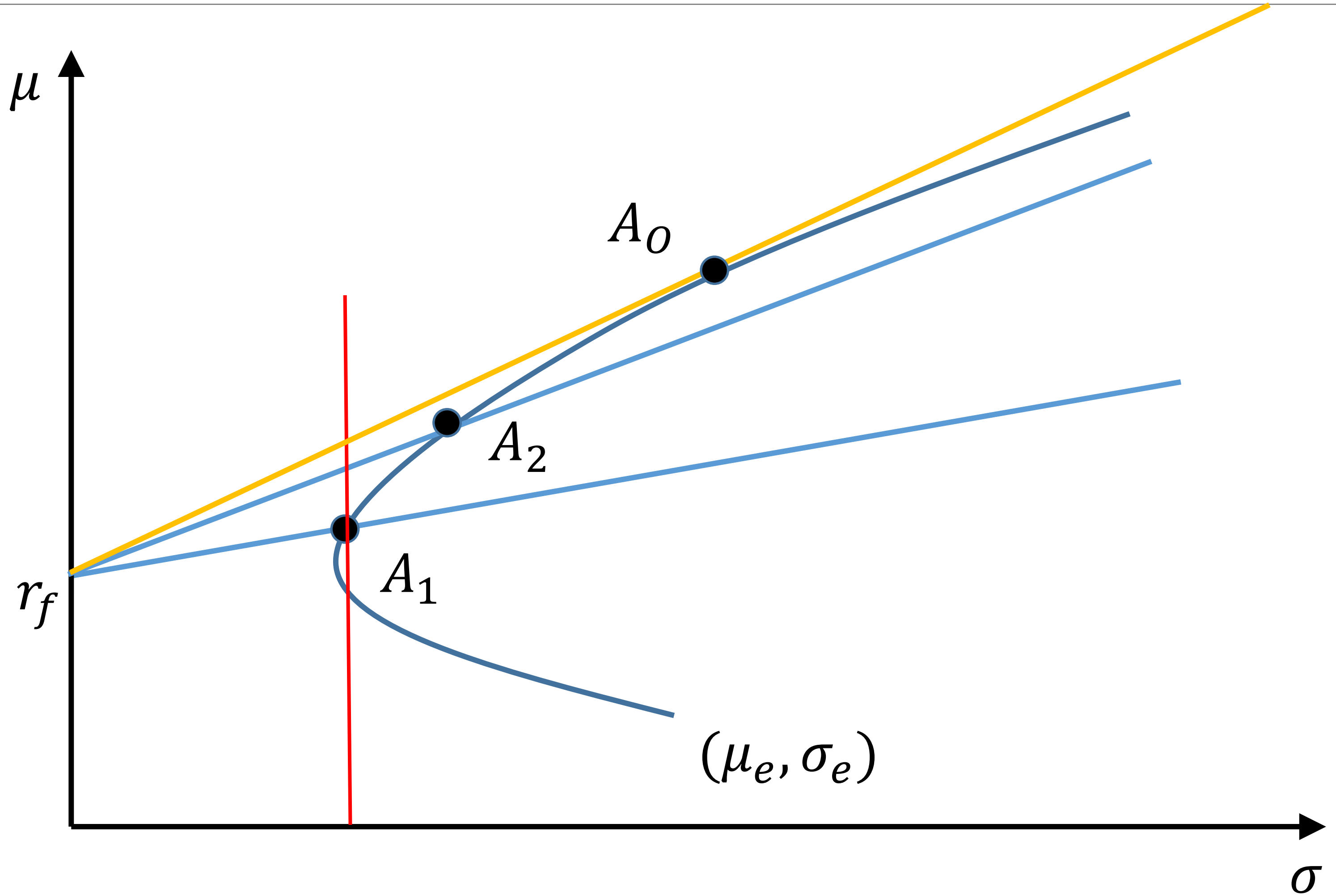
最优风险资产组合

- 投资者的问题包括两部分：挑选合适的风险资产组合 $\boldsymbol{w}'\boldsymbol{R}$，达到一定的风险资产预期收益与风险组合 (μ_A, σ_A)，同时选择合适的无风险资产（持有或者介入），以其满足风险-收益偏好
- 首先，投资者不会选择可行集内部的风险资产组合 (μ_A, σ_A)，而一定会选择有效前沿上的组合 (μ_e, σ_e)
- 其次，投资者一定会选择让无风险-风险组合线与风险资产组合可行集——实质是有效前沿——相切，由此确定最优风险资产组合 $A_* = (\mu_*, \sigma_*)$
- 最终，投资者根据 A_* 和 r_f 确定最终资产组合 w_A^*

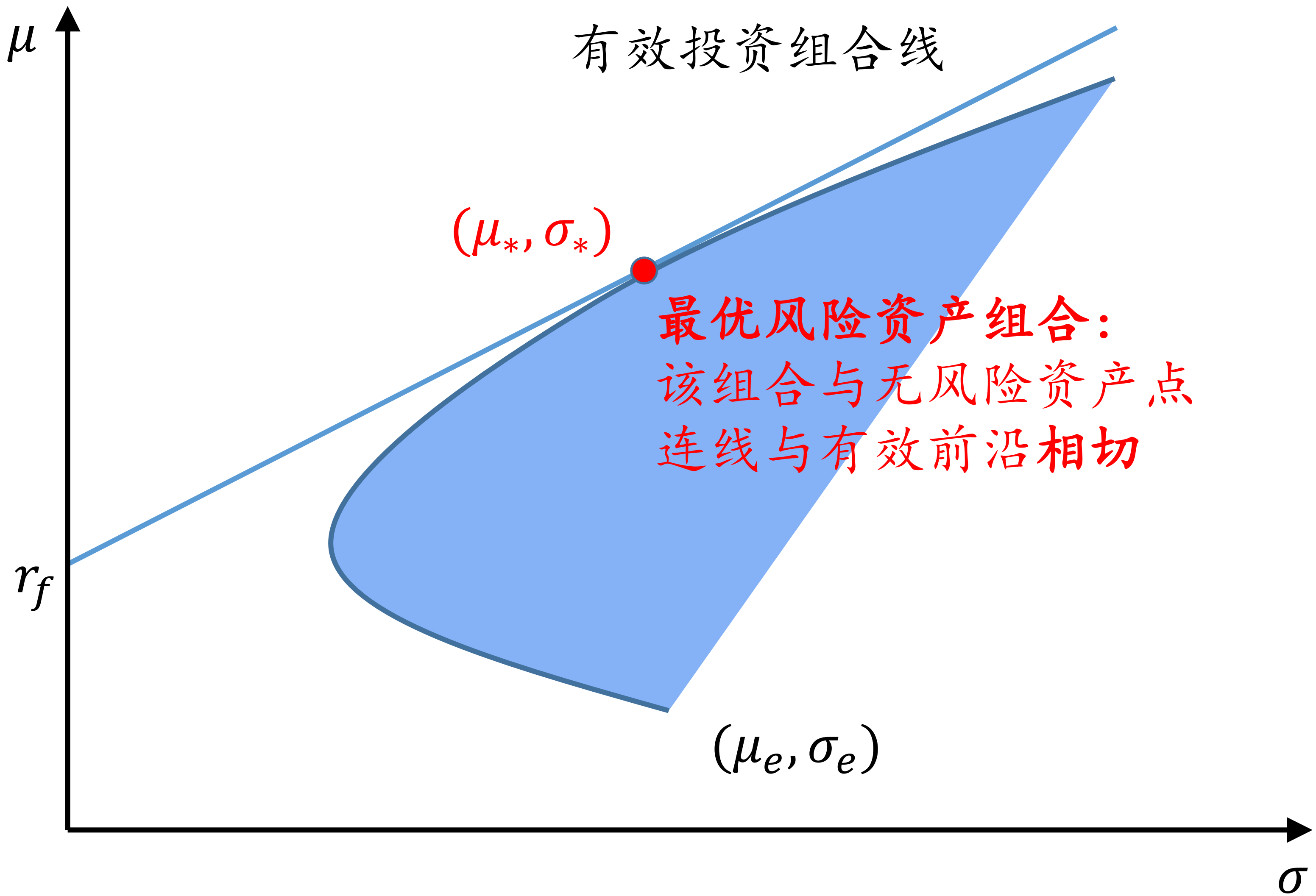
风险资产组合最优选择示意



最优风险资产组合：切点条件



最优风险资产组合示意


μ
有效投资组合线
(μ_*, σ_*)
最优风险资产组合：
该组合与无风险资产点连线与有效前沿**相切**
r_f
(μ_e, σ_e)
σ

资产定价(asset pricing)与市场均衡

- 和第三讲讨论的无风险市场利率决定一样，风险资产（股票）的收益率也是由市场均衡决定的
  - 市场均衡确定资产收益率等价于确定资产价格：

$$P_t = \frac{C_{t+1} + P_{t+1}}{1 + R_{t+1}} = \frac{C_{t+1}}{1 + R_{t+1}} + \frac{C_{t+2}}{(1 + R_{t+1})(1 + R_{t+2})} + \cdots$$

- 当市场中存在多种资产时，通常可以通过一些基本资产的价格（收益率）来确定其他资产的价格（收益率），这其中最基本的思想就是无套利(no arbitrage)
- 市场中的资产价格同时反映了：时间价值、风险价值和套利价值

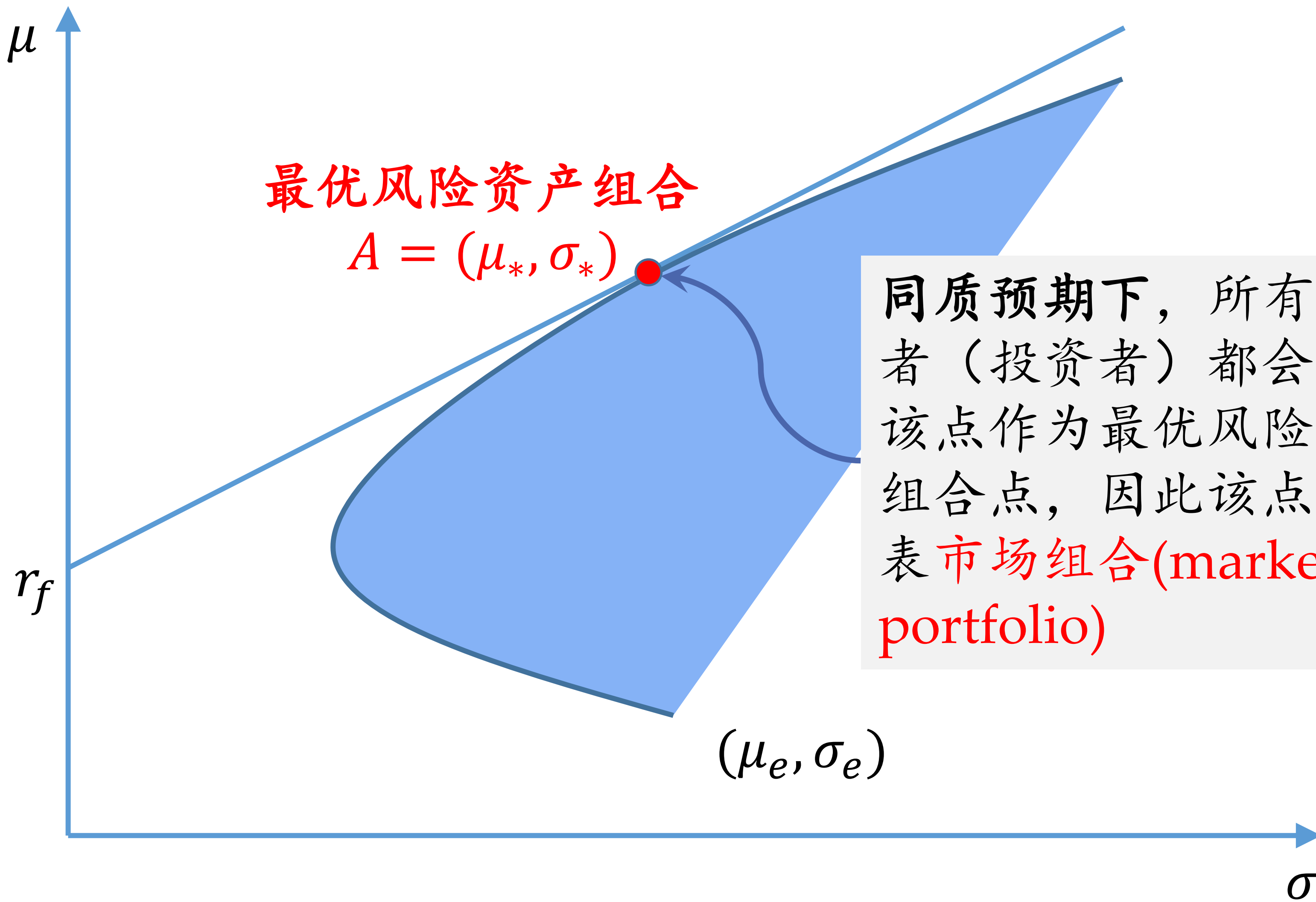
市场均衡的进一步解释

- 在一般的意义上，市场均衡(market equilibrium)是指市场中各种商品的价格 $p=(p_1,p_2,\ldots)$ 和各个交易者对各种商品（净）需求或（净）供给 $x^i=(x_1^i,x_2^i,\ldots)$ 的一个特定状态；在这个状态之下，各商品需求等于供给（净需求/供给为 0），且在给定的价格 p 下，各交易者均实现了自己最优的交易组合
- 这类均衡又称为竞争均衡(competitive equilibrium)；竞争性体现在每个交易者都把价格 p 视为给定的，自己的行为不影响 p
- 我们讨论的资产市场均衡也是在这个意义下

资产市场均衡与信息

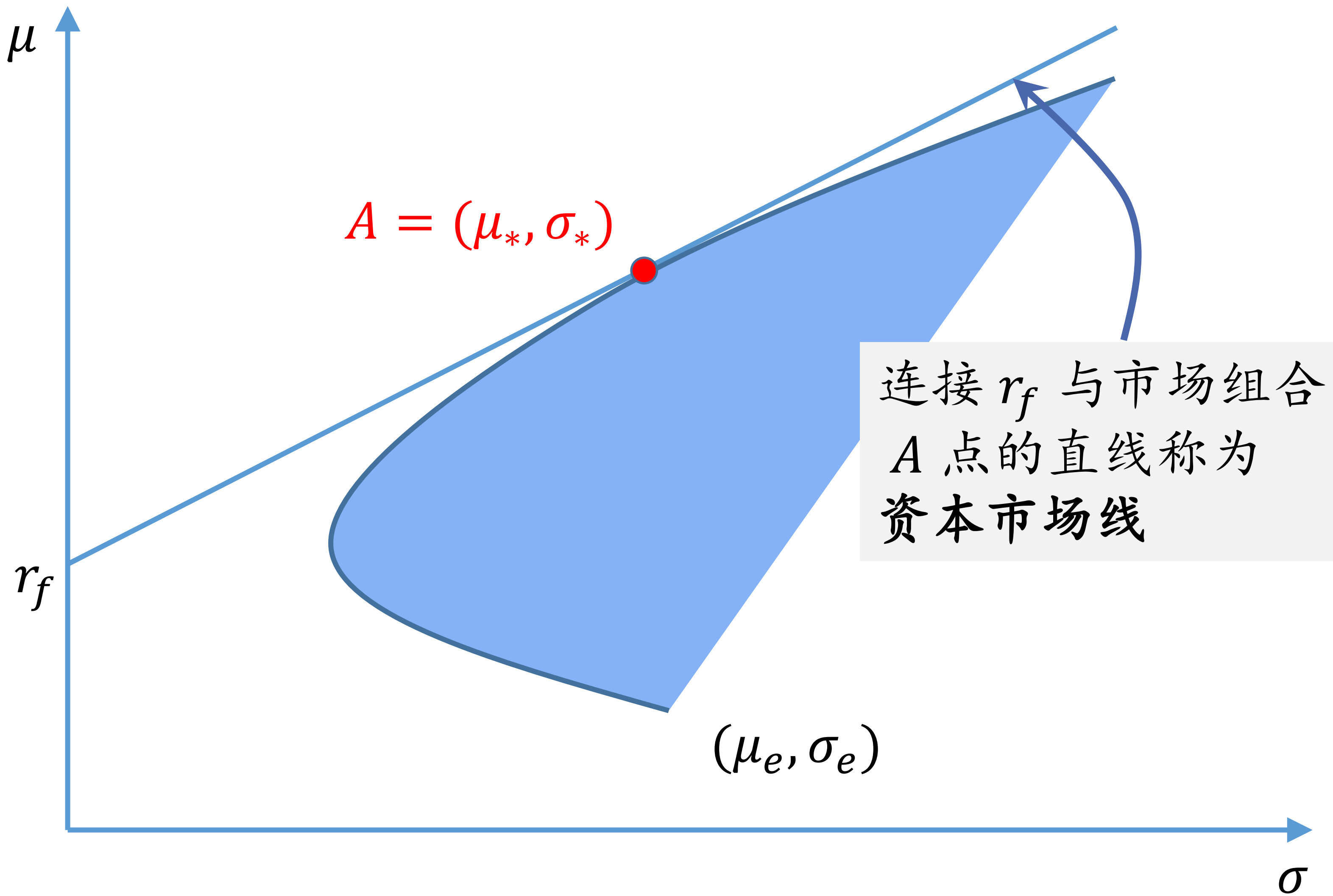
- 投资者在做投资决策时需要对资产的未来收益信息有所了解——这些信息由收益率分布 F 表示
- 现实中，不同投资者对 F 的预期(expectation)不尽相同：一是由于各自不同的先验信念(prior belief)；二是由于无处不在的信息差异，即信息不对称(information asymmetry)，因此每个投资人都有自己的 F^i，称为异质预期(heterogeneous expectations)
- 作为最基本的理论分析出发点，经典资产均衡定价理论假设所有投资人具有同质（homogeneous）预期

同质预期下的风险资产组合选择



同质预期下，所有市场者（投资者）都会选择该点作为最优风险资产组合点，因此该点就代表市场组合(market portfolio)

资本市场线 capital market line



Sharpe 比率与有效投资组合

- 对于任何一个投资组合（包括单个资产），Sharpe 比率定义为超额回报与组合标准差的比：

$$\frac{\mathbb{E}R_w - r_f}{\sigma_w}$$

- 最优投资组合：Sharpe 比率最高的风险资产组合；该组合与无风险借贷一块，可以让投资者在所愿承受的任何风险水平下，实现最高的收益率
- 前面的分析表明，无风险-风险资产组合线与风险资产可行集的切点 A 代表了最优投资组合
- 当投资者有同质预期时，最优投资组合同时还是市场组合

资本资产定价模型

- 资本资产定价模型(capital asset pricing model, CAPM)：在资产组合模型基础上，引入均衡概念，实现对单个风险资产的定价（确定收益率）
  - 现代资产组合模型的奠基人：H. Markowitz 1952 “Portfolio selection” *Journal of Finance*，1990 年获诺奖；同期还有 A. Roy 提出了均值-方差分析的模型（1952 *Econometrica*）还有更早的意大利数学家 de Finetti 1940 的类似贡献引入无风险资产从而得到分离定理是由 J. Tobin 所完成（1958 *Review of Economic Studies*，1981 年获诺奖）
  - CAPM 的提出者：Lintner 1965 RE&S，Mossin 1966 ECTA，Sharpe 1964 JF（1990 年获诺奖）

CAPM 逻辑结构

- 给定投资组合，分析是否要在边际上多投资一单位单个风险资产
- 为此，首先要度量单个风险资产对投资组合的风险贡献；当投资组合为市场组合时，则为系统性风险
- 得到单个风险资产期望收益率所应满足的条件，进而明确市场均衡时该资产期望收益率如何与市场收益率相联系
- 最终得到 CAPM 定价公式
- CAPM 是对期望收益率（期望价格）进行定价

单个风险资产对投资组合的风险贡献

- 给定投资组合 $R_w = w_1R_1 + \cdots + w_nR_n$，其方差 σ_w^2 可以表示为
  $\mathrm{var}(R_w) = \mathrm{cov}(R_w, R_w) = \mathrm{cov}(w_1R_1 + \cdots + w_nR_n, R_w)$
  $= w_1\mathrm{cov}(R_1, R_w) + \cdots + w_n\mathrm{cov}(R_n, R_w)$
  $= w_1\sigma_1\sigma_w\rho_{1w} + \cdots + w_n\sigma_n\sigma_w\rho_{nw}$
- 两边同时除以 σ_w 可得：

$$\sigma_w = w_1\sigma_1\rho_{1w} + \cdots + w_n\sigma_n\rho_{nw}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_w}{\partial w_i} = \sigma_i\rho_{iw}$$

- 因此，增大一单位的资产 i 的投资（w_i 增加一单位），对组合风险的边际贡献为 $\sigma_i\rho_{iw}$

是否增加投资：Sharpe 比率

- 给定投资组合 R_w，是否应当多投资一单位资产 i ？
- <u>假设</u>：投资组合足够大，多投资资产 i 的个体风险可忽略不计，只计算其对投资组合的风险贡献 $\sigma_i\rho_{iw}$
  - 若是市场组合，则称这一部分风险为系统风险
- 多投资 i 的期望收益为 $\mathbb{E}R_i$，需要的资金成本为 r_f 用 $\sigma_i\rho_{iw}$ 计算的 Sharpe 比率为 $(\mathbb{E}R_i - r_f)/(\sigma_i\rho_{iw})$
- 只有当新增投资的 Sharpe 比率大于已有组合 Sharpe 比率时才有必要增加投资：

$$\frac{\mathbb{E}R_i - r_f}{\sigma_i\rho_{iw}} \geq \frac{\mathbb{E}R_w - r_f}{\sigma_w}$$

必要收益率与 β

- 新增投资 Sharpe 比率条件可以改写为

$$\mathbb{E}R_i - r_f \geq \frac{\sigma_i \rho_{iw}}{\sigma_w}(\mathbb{E}R_w - r_f)$$

- 定义上式右端系数为 β_{iw}：

$$\beta_{iw} = \frac{\sigma_i \rho_{iw}}{\sigma_w} = \frac{\mathrm{cov}(R_i, R_w)}{\mathrm{var}(R_w)}$$

- 定义必要收益率

$$r_i = r_f + \beta_{iw}(\mathbb{E}R_w - r_f)$$

- 是否投资于资产 i 取决于 $\mathbb{E}R_i$ 和 r_i 的大小关系：当 $\mathbb{E}R_i \geq r_i$ 时，才会增加对 i 的投资
- β_{iw} 衡量了必要收益率对组合收益变动的敏感程度

市场均衡

- 当市场均衡时，所有投资者都选择有效投资组合 A——资本市场线与有效前沿的切点对应的风险资产投资组合
- 因此这个组合也就是均衡市场投资组合，其收益率记为 R_M，期望值（平均值）记为 $r_M = \mathbb{E}R_M$
- 此时，市场中一支证券 i 的必要收益率为

$$r_i = r_f + \beta_i\left(r_M - r_f\right)$$

其中 $\beta_i = \mathrm{cov}(R_i, R_M)/\mathrm{var}(R_M)$ 表示资产 i 关于市场组合的 β

- β_i 反映了资产 i 的系统性风险

CAPM 收益率定价公式

- 市场均衡时，资产 i 的预期收益率 $\mathbb{E}R_i$ 需要满足：
  $$\mathbb{E}R_i = r_i = r_f + \beta_i(r_M - r_f)$$
  CAPM 定价公式
- 资产预期收益率等于其关于市场组合的必要收益率
- 如果 $\mathbb{E}R_i < r_i$，那么投资于资产 i 的 Sharpe 比率低于市场组合，意味着承担的额外系统性风险没有得到恰当补偿，因此对 i 的需求小于供给——为恢复供需平衡，价格会下降从而提高预期收益率
- 反之，如果 $\mathbb{E}R_i > r_i$，则会有超额需求——为恢复供需平衡，价格会上升，从而降低预期收益率

权益风险溢价

- 考虑股票市场，CAPM 定价公式中市场组合预期收益率与无风险利率的差 $r_M - r_f$ 称为权益风险溢价 (equity risk premium)，该值衡量权益资本总体相对于无风险资产的风险溢价水平

国家、地区	权益风险溢价历史平均	Sharpe 比率
中国	14.77%	0.467
美国	7.83%	0.511
欧洲	6.44%	0.368
日本	0.24%	0.013

数据来源：Carpenter, Lu, & Whitelaw (2021, JFE)，样本期：1995-2016

CAPM 的拓展

- 上面分析的 CAPM 也称为 Lintner-Sharpe 版本：
$$\mathbb{E}R_i = r_f + \beta_i(r_M - r_f)$$
- 其理论预测非常强：资产超额收益与市场超额收益成正比，与其 β 也成正比，且与其他变量无关
- Fischer Black 1972 放松了可以按照无风险利率 r_f 任意借款的假设，相应的定价公式变为
$$\mathbb{E}R_i = \mathbb{E}R_{ZM} + \beta_i(r_M - \mathbb{E}R_{ZM})$$
其中 $\mathbb{E}R_{ZM}$ 表示一 β 为 0 的资产组合预期收益率
- CAPM 的核心预测：资产预期收益正比于其 β
- 这一线性关系也称为证券市场线

CAPM 的实证表现

- 70 年代，随着 Chicago Univ. Center for Research in Security Prices (CRSP) 的建立，股票价格、股利等收益数据得到系统性的整理CAPM 定价公式的实证研究得以实现：对下面这类方程进行回归

$$R_{it} - r_f = \alpha_i + \gamma\beta_i + \epsilon_{it}$$

- CAPM 理论预测 $\gamma > 0$，回归结果证实了这一点
- 但其他预测，比如 $\alpha_i = 0$ 以及 $\gamma = r_M - r_f$ 等，实证检验并不成功
  - 总结：Fama & French 2004 JEP

资产收益率的因子模型

- 受 CAPM 理论定价公式的启发，以及 CAPM 实证方面遇到的各种问题，70 年代开始金融经济学家开始发展资产收益率的因子模型
  - 开创性工作为 S. Ross 1976 JET
- CAPM 本身就可以视作一个单因子模型

$$\mathbb{E}R_i = r_f + \beta_i \underbrace{\left(r_M - r_f\right)}_{\text{因子：市场风险}}$$

- 写为收益率的形式：

$$R_i = \mathbb{E}R_i + \epsilon_i = r_f + \beta_i\left(r_M - r_f\right) + \epsilon_i$$

资产收益率为市场风险因子加个体性风险 ϵ_i

一般的因子模型

- 资产收益率写为其期望值、系统性风险与个体风险三部分之和

$$R_i = \bar{R}_i + m_i + \epsilon_i$$

- 因子模型假定系统性风险 m_i 可以表示为少数几个风险因子的组合

$$m_i = b_i^1 F_1 + \cdots + b_i^K F_K = \boldsymbol{b}_i' \boldsymbol{F}$$

其中 $\boldsymbol{b}_i'$ 称为因子载荷(factor loading)，$\boldsymbol{F}$ 为一组对所有资产都起作用的共同因子

- 由于个体风险 ϵ_i 的存在，此类模型称为带噪音的因子模型(noisy factor model)

- 若 $\epsilon_i = 0$，称为精确因子模型

套利定价：精确因子模型

- 对于精确因子模型，可以使用无套利原理进行定价
- 下面值讨论单因子情形，一般情形参考王江《金融经济学》第14章
- 假设所有资产都满足单因子模型：
$$R_i = \bar{R}_i + b_i F, \qquad \forall i = 1, \dots, n$$
各资产的因子载荷 b_i 均不相同此外，还存在无风险资产，收益率为 r_f
- 套利定价（实际上是无套利定价）最终关心 $\bar{R}_i$ 等于多少

精确单因子模型套利定价

- 对任意两个资产 i, j，可以选择适当的投资比例 w 满足 $wb_i + (1-w)b_j = 0$这样构造的投资组合 $wR_i + (1-w)R_j = w\bar{R}_i + (1-w)\bar{R}_j$ 为一个无风险组合，故其收益率必须等于 r_f，故

$$w\bar{R}_i + (1-w)\bar{R}_j = r_f \Rightarrow \frac{\bar{R}_i - r_f}{b_i} = \frac{\bar{R}_j - r_f}{b_j} \equiv \lambda$$

- λ 与具体资产 i 无关，称为因子溢价(factor premium)
- 因此，$\bar{R}_i = r_f + b_i\lambda$ 成立

一般因子模型与套利定价

- 对一般因子模型，由于个体风险 ϵ_i 的存在，无法直接使用（无）套利定价的论证方式
- 不过，当资产数目足够大时，可以通过构造资产组合来分散个体风险这样构造的资产组合可以看做是只受系统性风险因子影响，近似等价于精确因子模型
- 极限状况下，可以说明各个资产预期收益率必须满足一定的形式：$\bar{R}_i \approx r_f + b_i^1\lambda_1 + \cdots + b_i^K\lambda_K$，背后的逻辑称为极限套利(limit arbitrage)
- 注意：极限套利不是套利；无套利是资产市场均衡的自然结果，但极限套利不是

资产定价的实证因子模型

- Fama & French 1992/1993 三因子模型

$$\bar{R}_{it} = a + b_M(r_{Mt} - r_{ft}) + b_S \cdot Size_t + b_{MB}\left(\frac{M}{B}\right)_t + \epsilon_{it}$$

- Fama & French 2015 五因子模型

$$\bar{R}_{it} = \cdots + b_P \cdot Pro_t + b_I \cdot Inv_t + \epsilon_{it}$$

- 关于中国的情形：王菡田、朱英姿 2011《金融研究》考虑了 8 个因子——市场风险溢价，账面市值比，盈利股价比，现金流股价比，投资资本比，工业增加值变化率，回购利率和期限利差