第五讲：

债券和股票估值

武汉大学本科金融工程专业2021春公司金融
授课人：刘岩

本讲内容

- 利率、债券估值
- 股票估值
- 资产收益率
- BDM 第 6、9 -11章， RWJ 第 8-11 章

债券的基本结构

- 债券是金融证券的一种，也称为固定收益证券(fixed income security)
- 债券的基本结构要素：
  1. 面值(par/face value)：一份债券的票面价值
  2. 息票利率(coupon rate)：每个利息周期的息票支付百分比
  3. 息票(coupon)：每次利息支付的数额，等于息票利率乘以面值
  4. 到期日(maturity)：债券发行时确定的存续期
- 提前约定，按期偿付
- 例如：20年期，面值100，息票率10%，按年付息

债券的价值

- 给定债券的基本结构信息，则其市场价值取决于市场要求的到期收益率(yield to maturity, yield)，即衡量债券现值的市场利率
- 给定债券的期限 T，息票利率 i，面值 F，则其现值为债券到期偿付面值的现值加上按期赔付的息票（现金流）现值之和：

$$P = \sum_{t=1}^{T} \frac{iF}{(1+r)^t} + \frac{F}{(1+r)^T} = A_r^T(iF) + \frac{F}{(1+r)^T}$$

其中 r 为到期收益率

折价债券和溢价债券

- 特殊情况：$i = r$

$$P = \frac{rF}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^T}\right) + \frac{F}{(1+r)^T} = F$$

此时债券价值为现值，称为平价债券

- 当 $i < r$ 时，$P = A_r^T(iF) + F(1+r)^{-T} < F$，此时债券价值低于面值，称为折价债券
- 当 $i > r$ 时，$P = A_r^T(iF) + F(1+r)^{-T} > F$，此时债券价值高于面值，称为溢价债券

到期收益率的计算

- 给定债券基本结构，债券价值（市场价格）与到期收益率存在一一对应关系
- 若债券的基本结构为 (F, i, T)，而其交易价格为 $P > 0$，则到期收益率 r 需满足：

$$P = \frac{iF}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^T}\right) + F(1+r)^{-T}$$

- 若 $i > 0$，上式右端（RHS）关于关于 r 递减，且

$$\lim_{r\to 0} RHS = (iT+1)F, \qquad \lim_{r\to\infty} RHS = 0$$

故由中值定理可说明存在唯一的到期收益率 r，不过其计算需要通过数值方法

两个注记

- 当 $i > 0$ 时，前页 RHS 关于 r 的导数为

$$-\frac{i}{r}\frac{\overbrace{(1+r)^{T+1}-1-(1+T)r}^{>0}}{r(1+r)^{T+1}}-\frac{T}{(1+r)^{T+1}}<0$$

- 零息票债券：$i=0$，此时债券价格和到期收益率的关系直接满足

$$P=\frac{F}{(1+r)^T}\Leftrightarrow r=\left(\frac{F}{P}\right)^{1/T}-1$$

- 到期收益率实际上就是包含债券价格（初始投资）和债券偿付现金流这一投资项目的内部收益率

债券的现值

- 给定债券 (F,i,T)

$$PV(r)=\sum_{t=1}^{T}\frac{iF}{(1+r)^t}+\frac{F}{(1+r)^T}$$

- $PV(r)$ 是 r 的减函数（不论 i 是否为 0），因为上式中每一项都是 r 的（严格）减函数
- 到期收益率 r 满足

$$-P+PV(r)=-P+\sum_{t=1}^{T}\frac{iF}{(1+r)^t}+\frac{F}{(1+r)^T}=0$$

- 故 r 可以看做完整的债券投资项目的内部收益率

债券种类

政府债券(government bond)

- 政府债券是政府发行并还本付息的固定收益证券，如中央政府债（国债）、地方政府债（市政债）
- 国债是金融市场中最重要的金融资产之一
- 国债分为记账式国债、凭证式国债、储蓄国债，1-20年不等

企业债券(corporate bond)

- 企业债券又称为公司债券，是由企业发行还本付息的固定收益证券

债券市场

- 债券市场可以分为两种类型：场内市场和场外市场
- 场内市场即交易所市场(exchange market)，如上交所、深交所交易所负责组织、协调投资者（机构和个人）之间的交易行为，形式上投资者直接与交易所进行买卖交易，价格形成机制一般为**撮合竞价**
- 场外市场(over-the-counter market, OTC)是指投资者互相直接进行买卖交易，价格形成一般是**询价制**
  - 但真实情况下，OTC 交易很多时候要求有成熟的做市商(market maker)体系，扮演了交易所的角色
- 债券交易主要在OTC市场，如中国银行间债券市场

债券风险：利率风险

- 前面给出的债券价格计算公式依赖于市场利率（到期收益率），而该利率是不断变化的，从而会导致债券价格的不断变化，利率变动导致的风险称为利率风险
- 均衡市场利率决定公式（t 到 $t+1$ 的市场利率，参考第三讲附加课件）：

$$1+r_{t,t+1}=\left(\frac{\beta u'(Y_{t+1})}{u'(Y_t)}\right)^{-1}$$

- 宏观环境的变化会引起市场参与者跨期替代率的变化，从而导致市场利率的变化；此外，还有很多因素可以导致市场利率的波动（流动性和其他突发事件）

债券风险：信用风险

- 固定收益证券面临的另外一类重要风险就是信用风险(credit risk)；在很大程度上，信用风险是此类证券最重要的一种风险
- 前面给出的债券定价公式暗含的假设是债务人不会违约(default)，即债务人会一直按时足额偿付约定利息和本金
- 但在现实中，只有很少的债务人（如靠谱的国家中央政府）能够确保按时足额赔付
  - 历史上发生过多次国家（主权）债务危机，如阿根廷、墨西哥、俄罗斯，及近期的欧洲债务危机(PIIGS)
- 债券的其他风险包括流动性风险、通胀风险等

企业债的信用风险

- 假设一支企业债的基本结构为 (F,i,T)，（无风险）市场利率为 r_f，则 $P_f=A_{r_f}^T(iF)+F\left(1+r_f\right)^{-T}$
- 如果该企业每一期都有 $p\in(0,1)$ 的概率违约，且违约后债权人得到的偿付为 0，则债券的价格为期望现金流的现值：

$$
\begin{aligned}
P &= \sum_{t=1}^{T}\frac{(1-p)^t iF}{\left(1+r_f\right)^t}+\frac{(1-p)^T F}{\left(1+r_f\right)^T} \\
&= A_r^T(iF)+F(1+r)^{-T}<P_f
\end{aligned}
$$

其中 $r=\frac{1+r_f}{1-p}-1$ 为调整过的市场利率

信用风险的度量

- 前面的例子表明，如果企业违约的可能不可忽略（信用风险大于0），那么企业债券的价格相比无风险情形会有一个折价，其大小反应了信用风险的大小
- 对潜在的普通投资者而言，企业违约概率很难直接测量；相比而言，企业债券的交易价格可以直接观测，因此可以通过债券价格 P 计算出到期收益率 r，进而与无风险利率进行比较，判断违约风险大小：
$$r - r_f$$
该差值称为信用利差(credit spread)
- 信用利差是衡量违约风险的常用指标
- 前例中的信用利差为 $\frac{p}{1-p}(1 + r_f)$

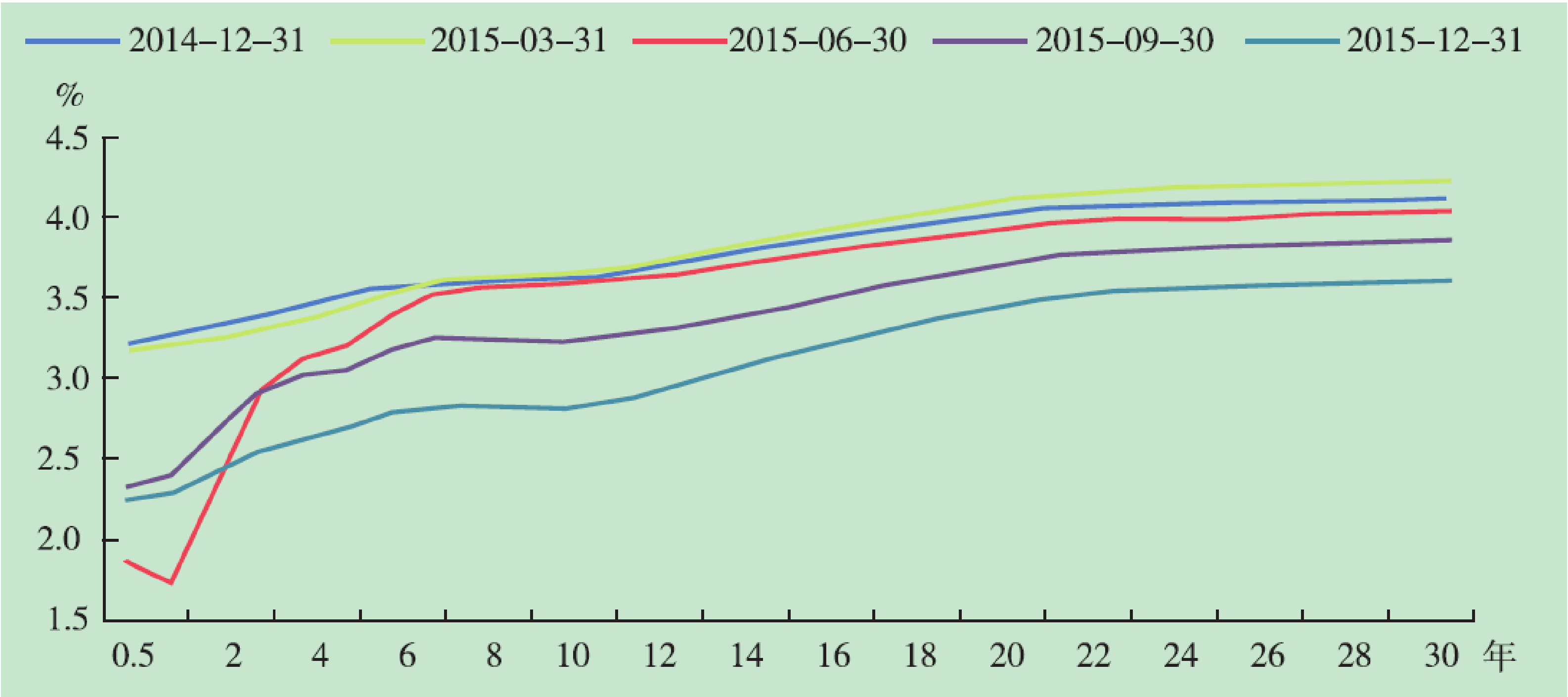
信用评级

- 尽管通过债券价格可以评估其信用风险，但作为投资人，还是希望尽可能直接了解企业的信用风险
  - 对债券发行时的初级市场投资人而言，债券价值 P 反应了投资债券的初始成本；从投资决策的角度看（NPV计算），希望能够对 P 进行合理定价
- 企业信用风险分析的专业机构成为信用评级机构 (credit agency)
  美国：S&P，Moody's，Fitch
  中国：东方金诚，新世纪，中诚信，联合，大公国际，鹏元等

利率期限结构与收益率曲线

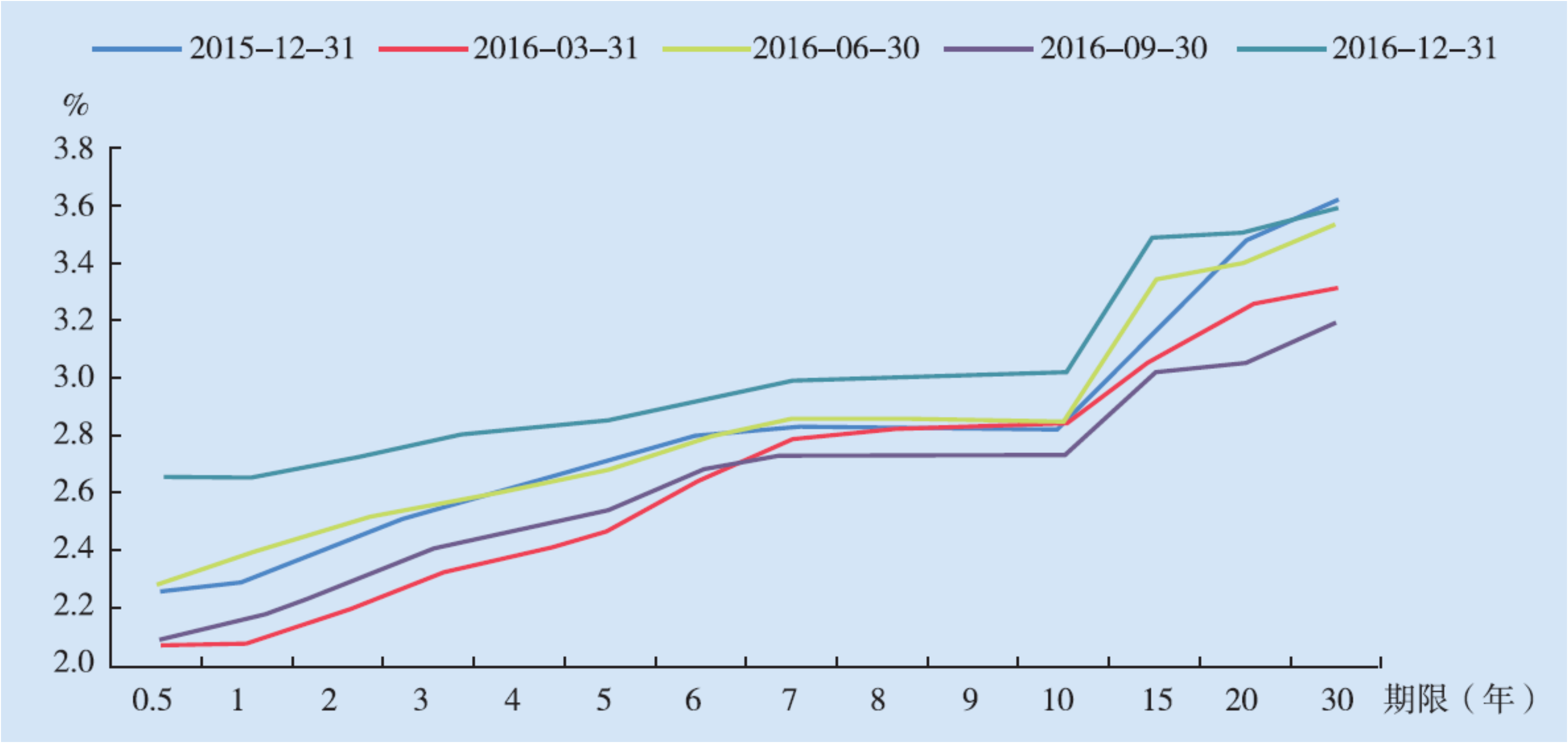
- 不同期限的国债其到期收益率可能不同：以 r_T 记期限为 T 的国债收益率，一般而言 r_T 随 T 递增；但短期利率的波动性一般大于长期利率
- 由于国债通常具有可忽略的信用风险，且流动性风险也极低，故国债的利率期限结构(term structure)——即长、短期债券收益率的结构——具有特别重要意义
- 一般把不同期限国债收益率连接起来，称为收益率曲线(yield curve)
- 国债市场的一个重要功能是提供基准的收益率曲线

国债收益率曲线示例：2014年



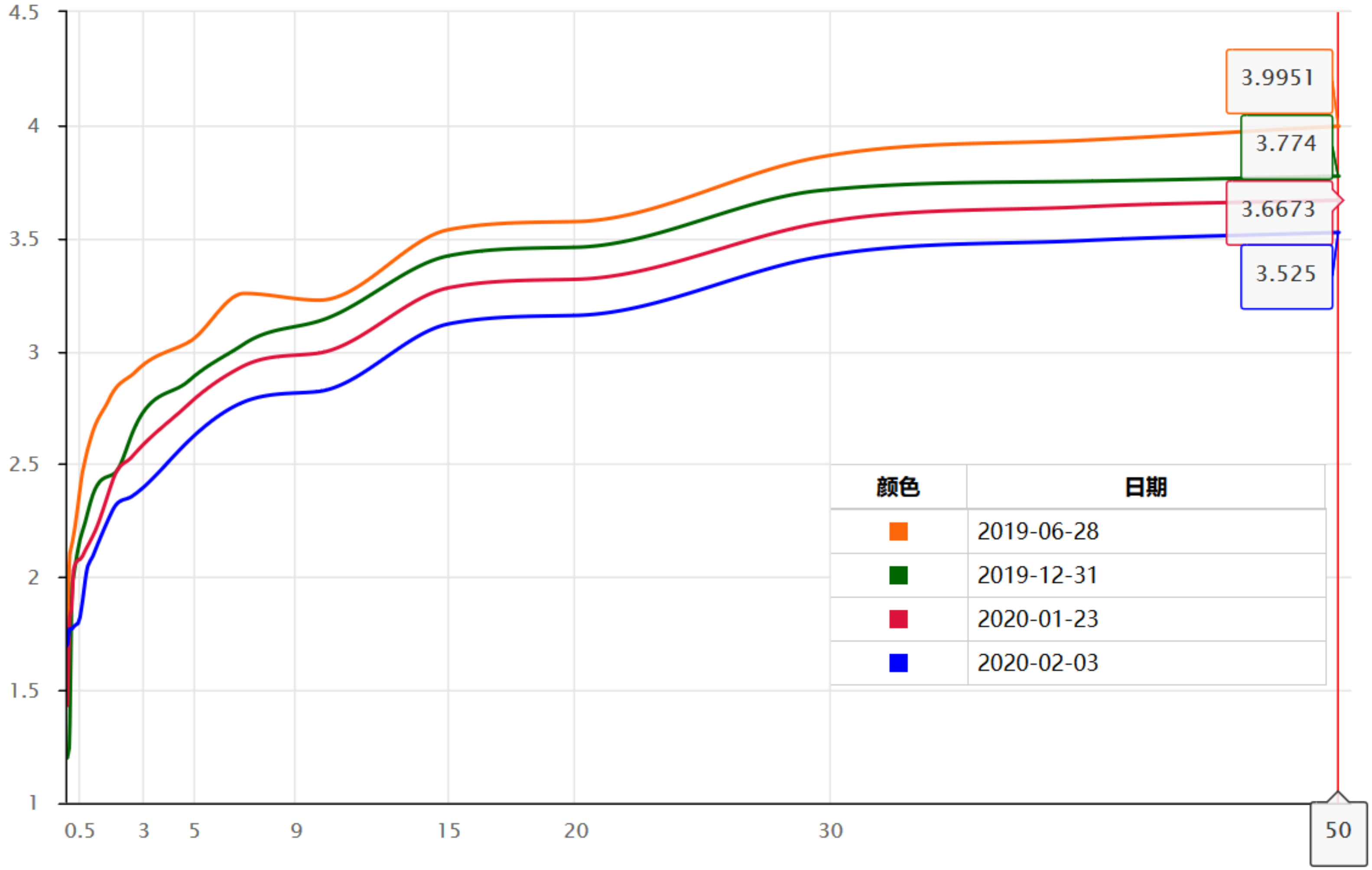
数据来源：《中国金融稳定报告2015》

国债收益率曲线示例：2016年

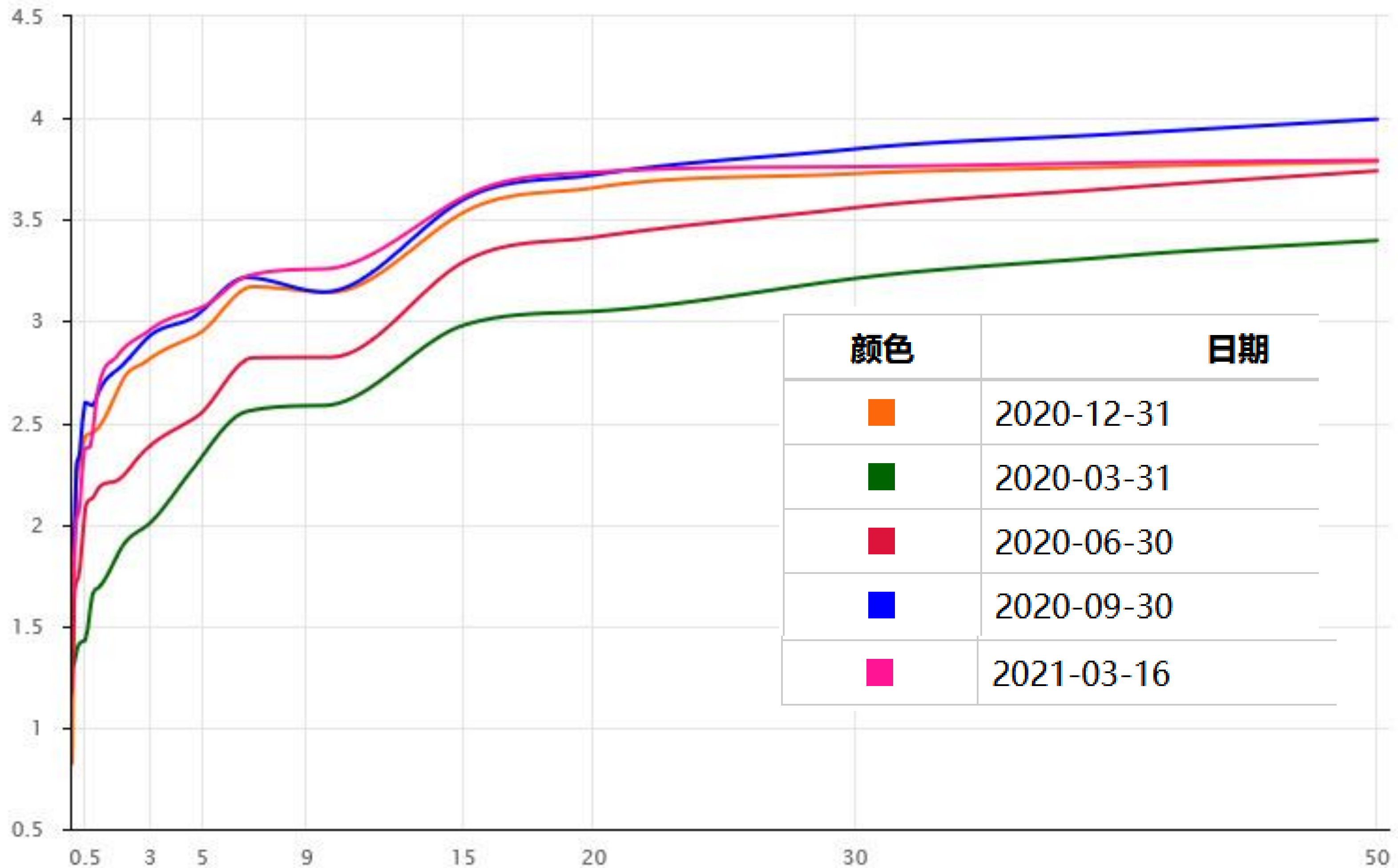


数据来源：《中国金融稳定报告2017》

国债收益率曲线：2019-2020，中债网



国债收益率曲线：2020-2021，中债网



股票估值的基本思想

- 股票作为一种证券，其自身允诺的现金流是以股利(dividends)的形式按期发放，时间上没有明确的到期时限
- 假设一支股票的股利为一确定序列 $D_t, t = 1, \dots, \infty$，合适的市场利率（折现率）为 r，则股票的现值为：

$$P = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+r)^t}$$

- 这一公式称为股票的股利折现（贴现）模型

股利折现模型：投资者视角

- 但如果投资者不是无限期的持有一支股票，则从该支股票获得的现金流是股利加最后卖出时的股票价格
- 为简单起见，假设持有一期，期末股票价格为 P_1，合适的市场利率仍为 r，则股票的现值为

$$P' = \frac{D_1 + P_1}{1 + r}$$

- 那么 P' 和前面得到的 P 有什么关系？
- 两者相等：

$$P' = \frac{D_1}{1 + r} + \frac{D_2 + P_2}{(1 + r)^2} = \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1 + r)^t} = P$$

股利增长

- 假设股利为常数 $D_t = D$，则有 $P = D/r$
  - 永续现金流公式
- 如果股利有增长，且增长率为常数 g，则股票价格为

$$P = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D(1+g)^{t-1}}{(1+r)^t} = \frac{D}{r-g}$$

前提条件是 $g < r$

- 类似的，还可以讨论分段的增长型股票价格公式
- 但重要的问题是增长率 g 如何确定；r 的确定同样重要（下一讲的内容）

股利增长率

- 假设企业没有进行外部融资，并且其盈利水平由其资产水平决定，则企业盈利及股利的增长只能来源于留存收益的增长，这个想法可以表示为：

$$\text{下一年的盈利} = \text{本年盈利} + \underbrace{\text{本年留存收益} \times \text{留存收益收益率}}_{\text{盈利的增长}}$$

- 如果股利/盈利比例不变，RR 为留存收益比率，则股利的增长率等于盈利的增长率：

$$g = RR \times \text{留存收益收益率}$$

- 如果用 ROE 代表留存收益收益率，则有

$$g = RR \times ROE$$

增长机会

- 与股利增长率不同，企业还可以考虑将资金投入到带来盈利增长的投资机会中，这样的投资项目称为增长机会(growth opportunity)
- 假设企业一开始所有盈利都以股利的形式发放，则股票价值为 $P = EPS/r$，EPS 为每股盈利
- 考虑下列情形：企业在 $t = 1$ 时可把盈利用来投资一个项目（净现值为 $NPVGO$），则股票价值为

$$P = \frac{EPS}{r} + NPVGO$$

- 当且仅当 $NPVGO > 0$ 时这样的投资才能提高股票价值；但通常这样的投资都能增加未来的盈利与股利

最优留存比例

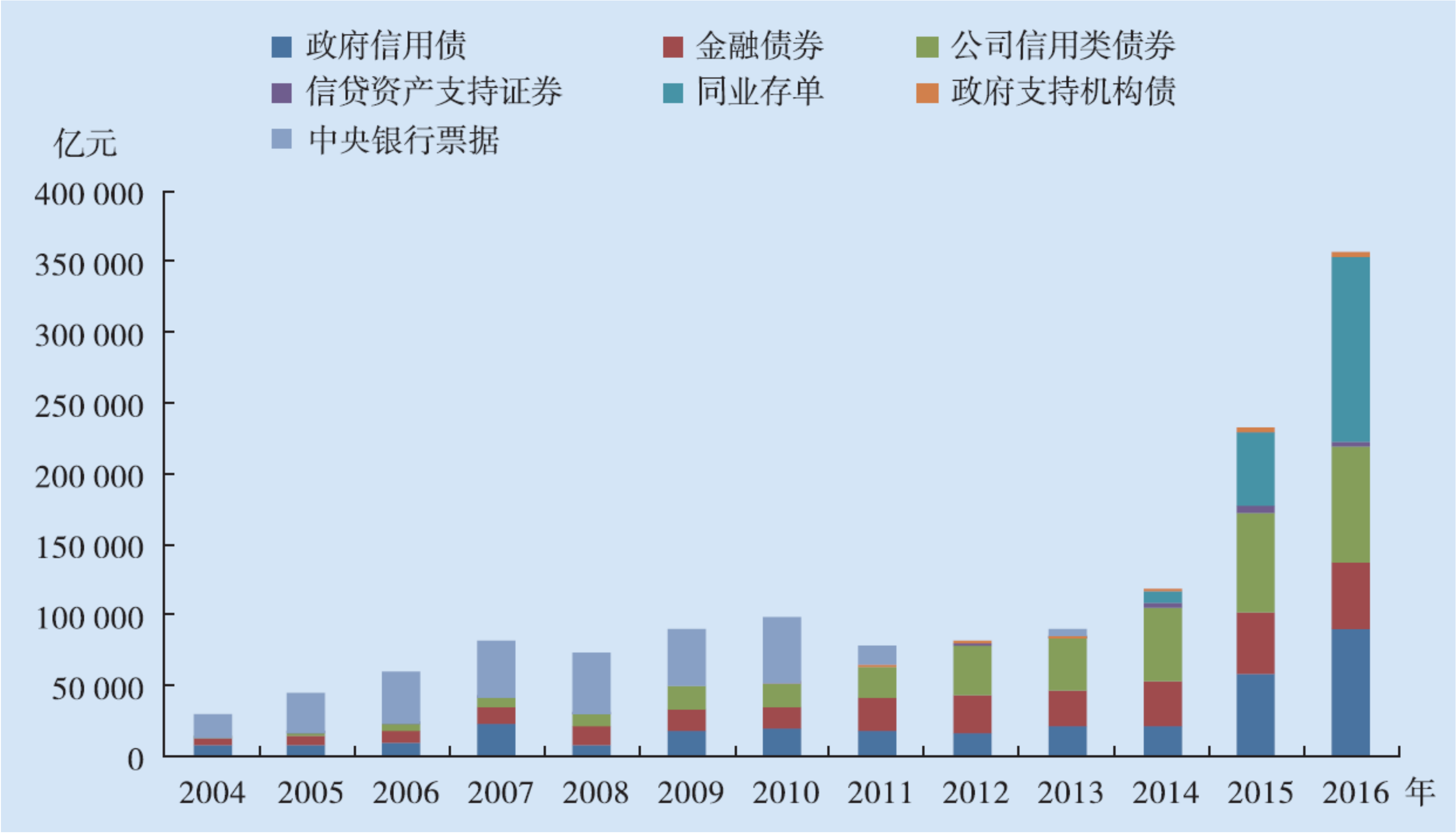
- 回到股利增长的讨论，给定 $g = RR \times ROE$，则企业股票价值表达式可写为：

$$P = \frac{D}{r - g} = \frac{(1 - RR) \times EPS}{r - RR \times ROE}$$

- 显然，当 $RR = 1$ 时，由于企业不发放股利，股价为 0；而当 $RR = 0$ 时，股利无增长（我们还在假设企业不进行外部融资）

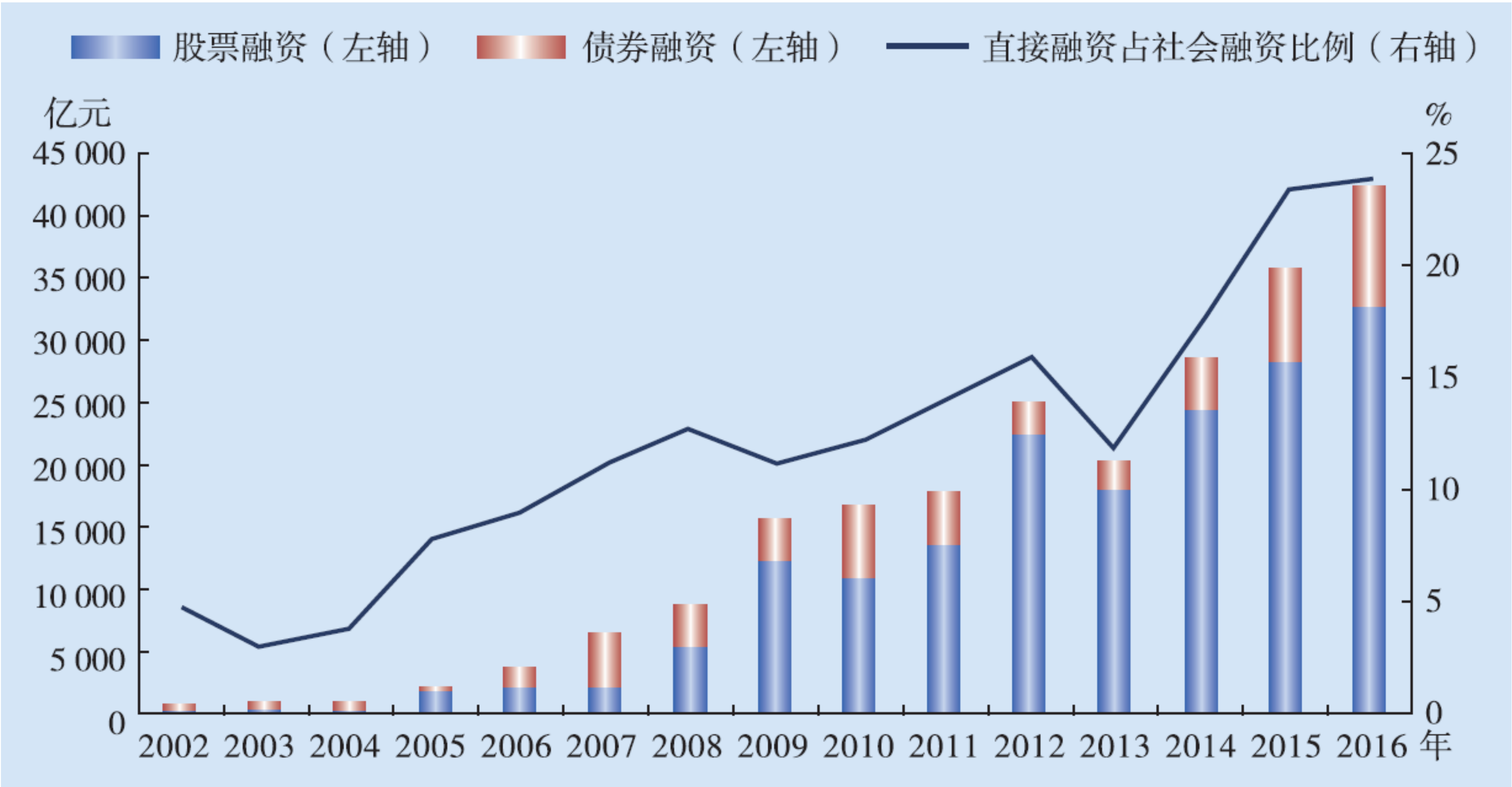
- 容易说明，当 $ROE < r$ 时，$RR^* = 0$
  思考：当 $ROE \geq r$ 时，最优的 RR^* 是什么？

中国的债券市场变化



资料来源：《中国金融稳定报告2017》

企业直接融资的变化：股票加债券



数据来源：《中国金融稳定报告2017》

资产收益率

- 金融资产（证券）都可以计算持有期的收益率
- 假设资产第 t 期的现金流为 C_t；前一期现金流支付后资产的市场价格为 P_{t-1}，而当期现金流支付之后的市场价格为 P_t，则 $t-1$ 到 t 的资产持有收益率为

$$R_t = \frac{C_t + P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{C_t + P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

- 收益率的风险来源：
  C_t 本身的变动和价格 P_t 的变动

股票收益率

- 具体到股票，习惯性区分两种收益率
- 股利收益率：D_t/P_{t-1}
- 资本利得收益率：$(P_t - P_{t-1})/P_{t-1}$
- 股票收益率为这两部分的和：

$$R_t = \frac{D_t}{P_{t-1}} + \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

- 在此基础上可定义持有期（累积）收益率：

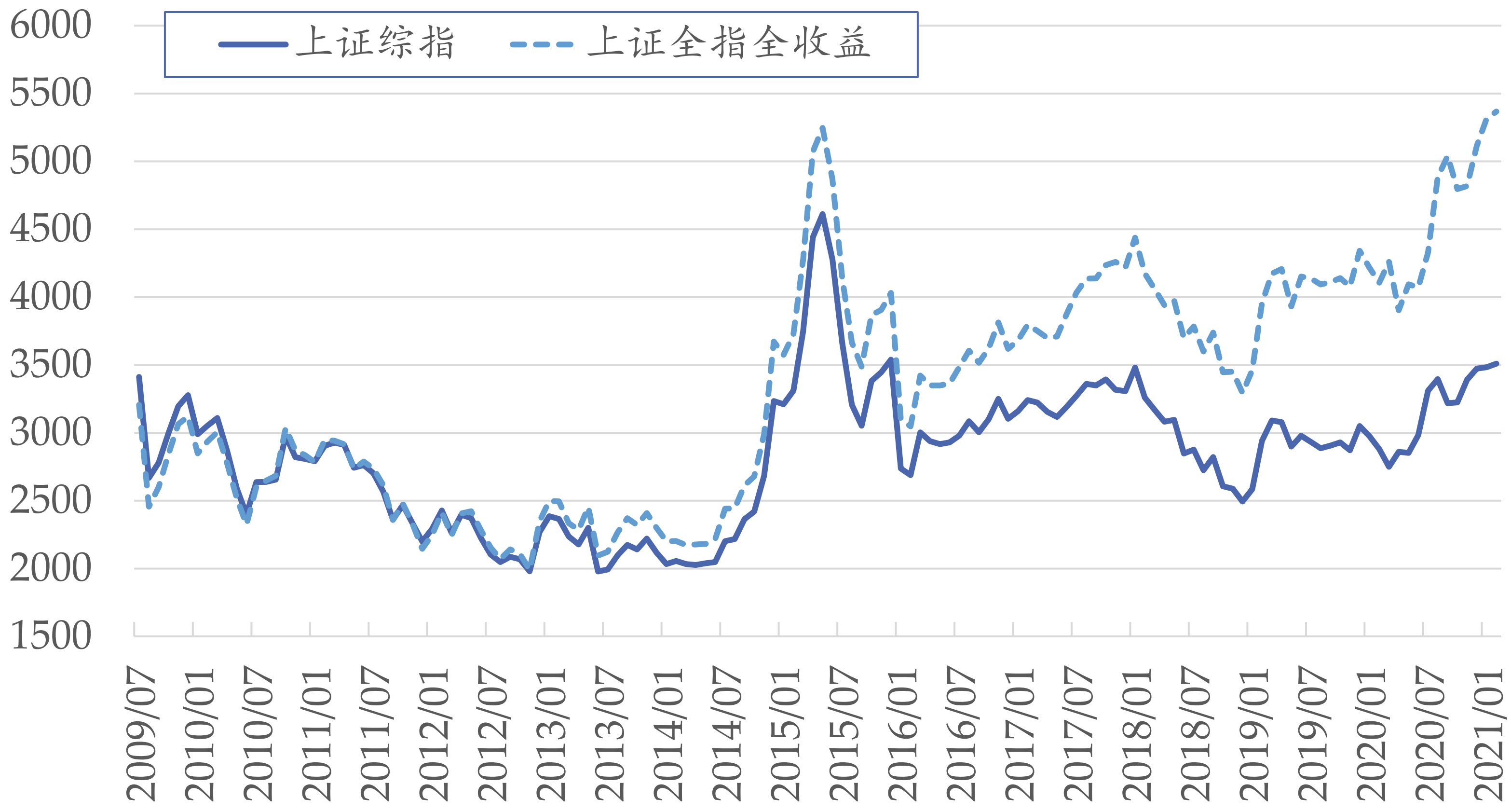
$$(1+R_1)\times(1+R_2)\times\cdots\times(1+R_T)-1$$

这一公式对所有资产均适用

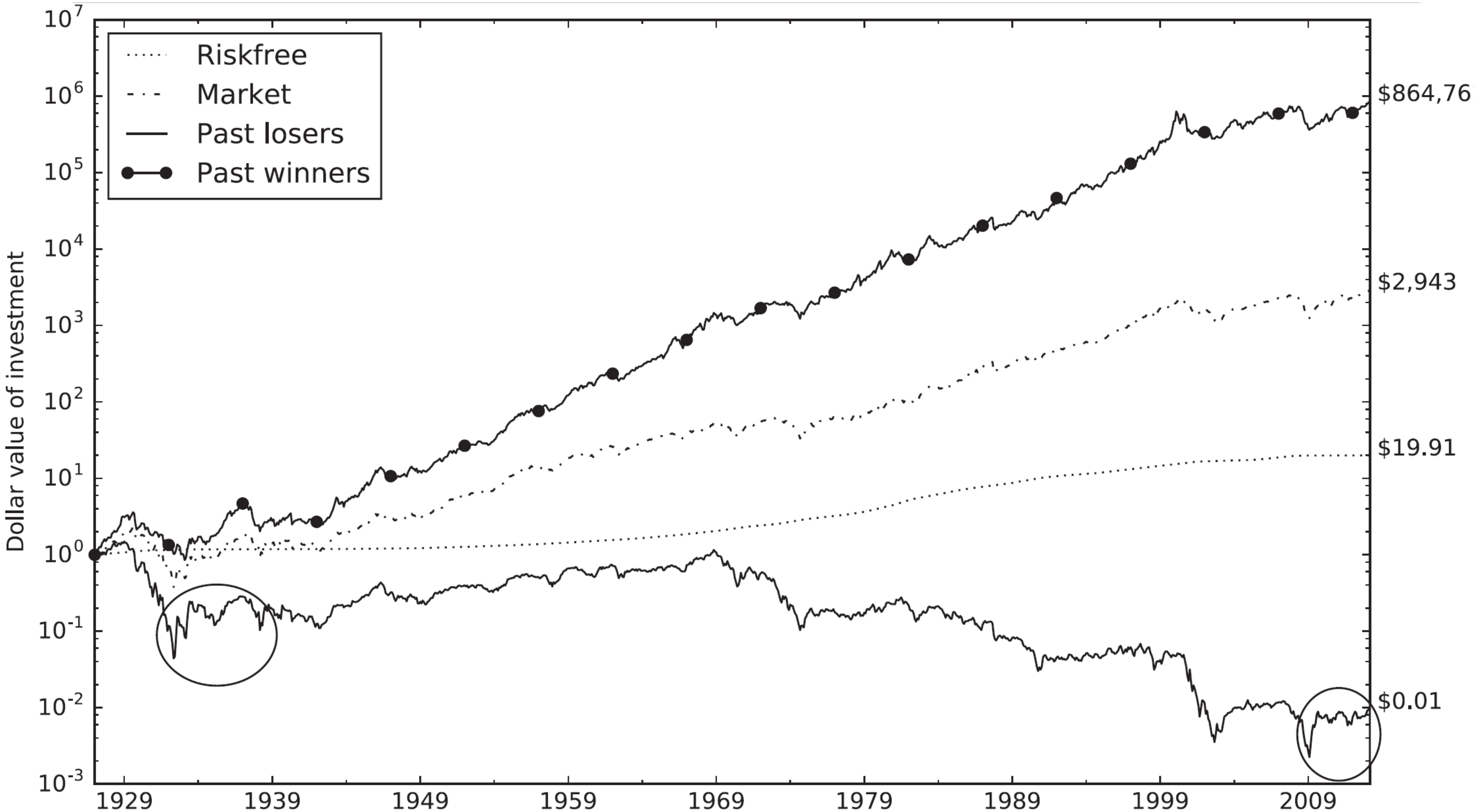
国债累积收益：2002-2021（中国债券网）

企业信用债累积收益：2007-2021

股票收益率：2009-2021（Wind）



美国证券市场累计收益



Daniel and Moskowitz 2016 JFE “Momentum Crashes”

收益率统计量

- 给定某一时期的收益率观测值：$R_t, t = 1, \dots, T$
- 收益率样本平均：

$$\bar{R} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t$$

- 收益率样本方差——度量风险的实用指标：

$$Var = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_t - \bar{R})^2$$

- 收益率样本标准差：$SD = \sqrt{Var}$

标准差与正态分布

- 如果收益率比 R_t 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，那么有下述常用概率数值：

$$\Pr(-\sigma \le R_t-\mu \le \sigma) \quad = 68.26\%$$
$$\Pr(-2\sigma \le R_t-\mu \le 2\sigma) = 95.44\%$$
$$\Pr(-3\sigma \le R_t-\mu \le 3\sigma) = 99.74\%$$

- 换言之，R_t 偏离总体均值超过 3σ 的概率为 0.26%
- 作为最简单的近似，可以使用样本均值估计总体均值 $\hat{\mu}=\bar{R}$，用样本标准差估计总体标准差 $\hat{\sigma}=SD$
- 美国 S&P-500 指数 1926-2008 年对应的平均收益率为 12.2%，标准差为 20.6%

几何平均收益率和算数平均收益率

- 给定收益率样本：$R_t, t = 1, \dots, T$
- 样本平均收益率是一个算数平均
- 我们还可以定义几何平均收益率：

$$R^g = [(1 + R_1) \times (1 + R_2) \times \cdots \times (1 + R_T)]^{1/T} - 1$$

这也就是累积收益对应的年化收益率

- 可以证明一般情况下 $R^g < \bar{R}$ （几何平均不等式）
- 但当样本值 R_t 都不大时，有 $R^g \approx \bar{R}$